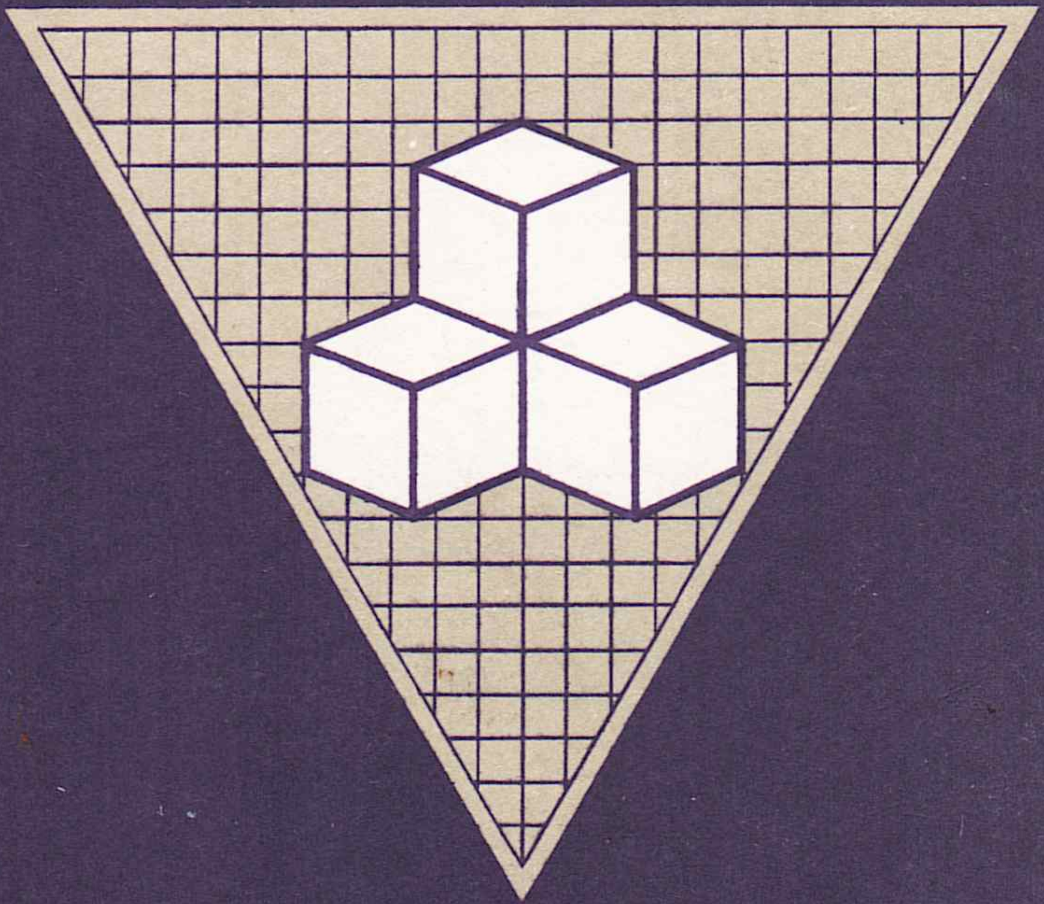
К.Г.ГӘРӘЕВ
Э.М.ИСХАКОВ
Г.М.МӨБӘРӘКҖАНОВ

МАТЕМАТИКА



КАЗАН
«МӘГАРИФ» НӘШРИЯТЫ
1998

К.Г.ГӘРӘЕВ
Э.М.ИСХАКОВ
Г.М.МӨБӘРӘКҖАНОВ

МАТЕМАТИКА

КАЗАН
«МӘГАРИФ» НӘШРИЯТЫ
1998

УДК 51
ББК 22.1я729
Г96

Рецензентлар — физика-математика фәннәре докторы, КДУ профессоры М. М. Арсланов, физика-математика фәннәре докторы, КДПУ профессоры Ф. Г. Мөхлисов, физика-математика фәннәре кандидаты, КДПУ доценты Н. З. Якушев.

Шушы китап материалларын нәшрият рөхсәтеннән башка яңадан бастырып чыгару "Автор хокукы һәм эргәдәш хокуклар турында" Россия Федерациясе Законын бозу була. Моның өчен закон нигезендә җавапка тарту каралган.

Гәрәев К. Г. һ. б.
Г96 Математика/К. Г. Гәрәев, Э. М. Исхаков, Г. М. Мөбәрәкҗанов.— Казан: Мәгариф, 1998.—351 б.: рәс. б-н.
ISBN 5-7761-0224-3

Бу китап математика белгечлеген сайлаган студентларга адреслана. Ул шулай ук югары уку йортларына керергә әзерләнүче абитуриентлар һәм математика укытучылары өчен дә файдалы булыр.

Б3—61—68—95/96

ISBN 5-7761-0224-3 © "Мәгариф" нәшрияты, 1998

КЕРЕШ СҮЗ

Студентлар һәм абитуриентлар өчен язылган математика кулланмаларын өч төргә бүләргә мөмкин:

1. Беренче төр кулланма — конкурс мәсьәләләре җыентыгы. Боларда математиканың мәктәптә үтелә торган һәр бүлегенә мисаллар һәм мәсьәләләр, шулай ук аларның җаваплары бирелә.

2. Икенче төр кулланма — беренче төр кебек үк, ләкин һәр бүлекнең башында төп теоретик төшенчәләр һәм формулалар җыелмасы бирелә. Кайвакыт берничә гади мисалның чишелеше күрсәтелә.

3. Өченче төр кулланма — теоретик материалдан һәм берничә мисалдан торган уку әсбабы. Беренче һәм икенче төр ярдәмлекләр мәктәп материалын яхшы үзләштерүче укучылар өчен югары уку йортларына керү имтиханнарында файдалы булса, өченче төр ярдәмлек теоретик белемнәрне тирәнәйтүгә ярдәм итәчәк.

Әгәр укучы белемен үзлегеннән үстерерлек дәрәҗәдә булмаса һәм аның белемендә кимчелекләр, өзеклекләр булса, ул чакта аңа югарыда күрсәткән ярдәмлекләрнең берсе дә ярамый. Аның өчен җитәрлек дәрәҗәдә җентекләп һәм аңлаешлы итеп язылган чишелеш методларын, алымнарын күрсәткән, керү имтиханнарында еш очрый торган мисаллар, мәсьәләләр һәм аларның чишелешләрен эченә алган ярдәмлек кирәк. Бу китап шушы таләпләргә җавап бирерлек итеп төзелде. Мәсьәлә һәм мисаллар чишүнең билгеле алымнарын, методларын өйрәнгәч кенә, "стандарт булмаган", "үзенә башка" мәсьәләләр һәм мисаллар чишеп карарга мөмкин, ә инде аларны чишүнең юлын, алымын, ысулын табу — кечкенә генә булса да фәнни һәм иҗади эш. Бу ярдәмлек, беренче чиратта, укучыларда мәсьәлә һәм мисал чишүгә гомуми караш тәрбияләү, иҗади хис уяту, аларның фәнни тикшеренүләргә сәләтен үстерү максаты белән эшләнде.

Беренче бүлектә рациональ, иррациональ, трасцендент тигезләмәләр, тигезләмәләр системалары һәм аларны чишү алымнары күрсәтелә. Шулай ук, урта мәктәпләрдә игътибар аз бирелә торган кире тригонометрик функцияләр һәм алар кергән тигезләмәләрне чишү юллары җентекләп тикшерелә.

Икенче бүлектә төрле тигезсезлекләр һәм аларны чишү юллары күрсәтелә. Тигезсезлекләрне чишкәндә очрый торган нәтиҗәле методларның берсе (универсал метод) булган интерваллар методына зур әһәмият бирелә. Бу метод, фәнни әдәбиятта шактый ук билгеле булуга карамастан, мәктәп дәреслекләрендә һәм ярдәмлекләрдә фәкать рациональ тигезсезлекләр чишкәндә генә кулланыла. Бу ярдәмлектә

ул үзенең алга таба үсешен тапты: чыгарылма төшенчәсен кулланып, бер билгесезле тигезсезлекләр өчен тамга алыштыру схемасының гади аналитик билгесе киң файдаланылды. Әлбәттә, бу методны барлык тигезсезлекләр өчен куллану мәҗбүри түгел: имтихан вакытында бирелгән тигезсезлекләрне (мәсәлән, иррациональ тигезсезлекләр) ике юл — ияләшкән ("мәктәп") һәм интерваллар методы белән чишү тәкъдим ителә.

Өченче бүлектә комбинаторика нигезләре һәм Ньютон биномы карала. Бу материал югары математика курсы өчен бик кирәкле булуга карамастан, мәктәп программасында өстән генә бирелә. Биредә күп мисаллар белән беррәттән математик индукция методы бирелә.

Дүртенче һәм алтынчы бүлекләрдә векторлар алгебрасы һәм анализ башлангычлары карала. Бу бүлекләрдә (башка бүлекләрдәге кебек үк) бирелгән материалларның шактый өлеше керү имтиханнары таләбеннән артып китә.

Бу аңлы рәвештә эшләнде, чөнки авторлар бу ярдәмлекне белемнәрне арттыру концепциясенә таянып хәзерләделәр. Уйлавыбызча, анализ башлангычлары һәм векторлар алгебрасының кыска һәм гади итеп бирелгән төп төшенчәләре (бирелгән мисаллар һәм мәсьәләләр бу төшенчәләрне тирәнрәк үзләштерүгә юнәлтелгән) булачак студентларга югары математиканы үзләштерү шартларына тиз һәм җиңел җайлашырга ярдәм итәчәк.

Бишенче бүлектә стереометрия буенча конкурс имтиханнарында очрый торган тиңик мәсьәләләрне чишү алымнары тикшерелә. Бу мәсьәләләрне чишкәндә, тригонометрия һәм алгебра методлары киң кулланылды. Шунысын әйтик, китапның күләме чикләнгән булганлыктан, кайбер теоремалар, кирәкле теоретик төшенчәләр конспект формасында бирелде, шуның өчен аларны чишү һәм тулыландыру укучылардан шактый көч таләп итәчәк.

Ярдәмлек урта мәктәп укучыларына, укытучыларына, яңа эшли башлаган репетиторларга, югары уку йортларына хәзерлек бүлекләренә һәм курсларына файдалы кулланма булачак.

Китапны чыгаруга матди һәм мораль булышлыклары өчен Түбән Кама шәһәренең "Казан" производство-коммерция фирмасы директоры И. Х. Хәбибуллинга, Татарстан укытучыларының белемен күтәрү институты профессоры Б. Ф. Солтанбековка һәм Казан Дәүләт техник университеты ректоры Г. Л. Дегтяревка авторларның рәхмәте зур.

I бүлек

ТИГЕЗЛӘМӘЛӘР

1. ТӨП ТӨШЕНЧӘЛӘРҺӘМ БИЛГЕЛӘМӘЛӘР

Тигезлек тамгасы "=" белән тоташтырылган ике математик аңлатма *тигезлек* дип атала. A һәм B аңлатмаларының тигезлеген карыйк:

$$A = B.$$

Бу аңлатмаларда, саннардан башка, хәреф белән бирелгән бер яки берничә зурлык булуы мөмкин. Аларның кайсылары билгесез (төп билгесезләр), кайсылары билгеле (параметрлар) икәне символлар аша күрсәтелә. Математикада билгесез һәм үзгәрешле зурлыкларны латин алфавитының соңгы хәрефләре белән тамгаласалар (x, y, z, t, s, u, v, ...), параметрларны алфавитның беренче хәрефләре белән тамгалыйлар: (a, $в$, c, d, ...).

Тигезлектәге үзгәрешле зурлыкларның кыйммәте бирелгән очракта A һәм B аңлатмаларының мәгънәсе югалмаса, ягъни кыйммәтләре реаль саннар булса, ул кыйммәт A һәм B аңлатмалары өчен (тигезлек өчен) *мөмкин табылган кыйммәт* дип атала. Андый кыйммәтләрнең күплеге *мөмкин табылган кыйммәтләр күплеге* (МТК) яки *өлкәсе* дип атала (МТӨ).

Мәсәлән, $\frac{\sqrt{x}+2a}{a+1} + \frac{\sqrt{x}-2a}{a-1} = 1$ тигезлегендә a — параметр, x — билгесез зурлык. Бу тигезлек өчен нуль һәм ± 1 дән башка барлык реаль саннар a параметрының МТК ген тәшкил итәләр. ($a \neq \pm 1$, чөнки нульгә бүлеп булмый. Әгәр $a = 0$ булса, тигезләмә дә, тигезлек тә булмавы ачык). Билгесез x теләсә нинди уңай сан була ала, ягъни x ның МТӨ $x \geq 0$ тигезсезлеге белән билгеләнә. Тигезлек билгесезләрнең МТӨ нә кергән барлык кыйммәтләре өчен дә дөрес санлы тигезлеккә әверелсә, ул тигезлек *бердәйлек* дип атала.

Мисаллар. 1. $(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2$ бердәйлегенең МТӨ барлык санлы турыдан гыйбарәт, ягъни x теләсә нинди реаль сан булганда да бу тигезлек дөрес санлы тигезлек бирә, шуның өчен ул бердәйлек дип атала да.

2. $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ тигезлеге бирелсен. Әгәр $x = k\pi$ булса, бу тигезлекнең мәгънәсе югала. Бу кыйммәтләрдән башка x ның барлык кыйммәтләре өчен бирелгән тигезлек бердәйлек була.

Тигезләмәгә кергән билгесезләр санына карап, тигезләмә бер, ике, өч яки күп билгесезле тигезләмә дип атала.

Мисаллар. 1. $x = \sqrt{2x-1}$ бер билгесезле тигезләмә. МТӨ: $x \geq \frac{1}{2}$

2. Ике билгесезле тигезләмә: $\frac{x+y}{x-1} = 3$. $x = 1$ турысында ята торган нокталардан башка (димәк, $x \neq 1$) саннар яссылыгында ята торган барлык нокталарның координаталары күплеге бу тигезләмәнең билгесезләре өчен МТӨ булып тора.

Тигезләмәләрне билгесезләр өстендә үтәлә торган математик гамәлләр характерына карап квалификациялиләр. Иң беренче аларны *алгебраик* һәм *трансцендент* тигезләмәләргә аералар. Алгебраик тигезләмәләрдә билгесезләр өстендә бары тик кушу, алу, тапкырлау, бүлү, бөтен дәрәҗәгә күтәрү һәм тамыр алу гамәлләре генә чикләнгән рәвештә үткәрелә. Әгәр билгесезләр өстендә башка гамәлләр дә эшләнсә, мәсәлән, иррациональ дәрәҗәгә күтәрү, логарифм алу, синус һәм косинусны исәпләү башкарылса, тигезләмә трансцендент тигезләмә дип атала.

Мәсәлән, $\frac{x^2-1}{2x} = 3$ — бер билгесезле алгебраик тигезләмә, $\frac{\lg 2y-y^2}{10y} = 1$ һәм $\frac{\sin^2 x \cos x}{\mathrm{tg}^2 x} = 0{,}5$ — трансцендент тигезләмәләр.

Алгебраик тигезләмәләр *рациональ* һәм *иррациональ* тигезләмәләргә бүленәләр. Рациональ тигезләмәләрдә билгесез зурлык тамыр астында булмый, ә иррациональ тигезләмәләрдә билгесез, я булмаса билгесезләрдән торган рациональ функция бер яки берничә тамыр астында очрый. Мәсәлән: $\frac{\sqrt{3}x-y^2}{x+2} = 3x$ — ике билгесезле рациональ тигезләмә, ә $\sqrt{x^3+2} = x+1$ — бер билгесезле иррациональ тигезләмә.

Үз чиратында, рациональ тигезләмәләр *бөтен* һәм *вакланмалы рациональ* тигезләмәләргә бүленәләр. Бөтен рациональ тигезләмәләрдә билгесез зурлык вакланмада булмый. Мәсәлән: $x^4 + 2x^2y - y^2 + 3 = 0$ — ике билгесезле бөтен рациональ тигезләмә, ә $\frac{x-1}{2} + \frac{3}{x+2} = 1$ — бер билгесезле вакланмалы рациональ тигезләмә.

Теләсә нинди *n*- дәрәҗә бер билгесезле бөтен рациональ тигезләмәне кайбер үзгәртүләрдән соң түбәндәгечә язарга мөмкин:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

монда n — натураль сан, $a_0 \neq 0$, a_1, a_2, $a_3, \ldots a_n$ — даими коэффициентлар, a_n — ирекле буын.

1.1. Бер билгесезле тигезләмәләр

Гомуми очракта бер билгесезле тигезләмәләрне болай язарга мөмкин:

$$f(x) = \varphi(x),$$

монда $f(x)$, $\varphi(x)$ — үзгәрешле x ның бирелгән функцияләре. Тигезләмәнең ике ягында да x урынына x_0 санын куйгач, дөрес тигезлек килеп чыкса, ул сан *тигезләмәнең чишелеше* яки *тамыры* дип атала.

Мәсәлән, $\sqrt{x-5} = 1 + \sqrt{10-x}$ тигезләмәсе өчен $x = 9$ аның чишелеше (тамыры) булып тора, чөнки $\sqrt{9-5} = 1 + \sqrt{10-9}$, ягъни $2 = 2$. Тигезләмәне чишү — ул тигезләмәнең барлык тамырларын табу, я булмаса, чишелеше юк икәнен исбатлау дигән сүз. Тигезләмәләрне чишкән вакытта *тамырдашлык* (эквивалентлык) төшенчәсе кулланыла.

Әгәр ике тигезләмәнең,

$$f_1(x) = \varphi_1(x), \qquad f_2(x) = \varphi_2(x),$$

тамырлары (чишелешләре) бер үк булса, яки икесенең дә чишелешләре булмаса, андый тигезләмәләр *эквивалент (тамырдаш)* тигезләмәләр дип аталалар. Андый тигезләмәләр өчен түбәндәге тамга кабул ителгән:

$$f_1(x) = \varphi_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) = \varphi_2(x).$$

Тамырдаш тигезләмәләрнең билгеләмәсе бары тик аларның тамырлары (чишелешләре) күплеге белән бәйләнгән, ә билгесезләрнең МТӨләре тәңгәл булмаска мөмкин.

Мисаллар. 1. $\frac{1}{x^2} = 1$, $\lg x^2 = 0$ тигезләмәләре тамырдаш, чөнки икесенең дә тамырлары ± 1 гә тигез. МТӨ ләре тәңгәл килә.

2. $x - 1 = 0$, $\lg x = 0$ тигезләмәләре тамырдаш, чөнки $x = 1$ ике тигезләмәнең дә бердәнбер тамыры. Бу тигезләмәләрдәге x өчен МТӨ тәңгәл килми. Моннан тыш, тигезләмәләрне нинди күплектә (МТӨ) тикшерүгә карап, алар тамырдаш була яки булмый.

Мәсәлән, $x - 2 = 0$, $x^2 - 4 = 0$ тигезләмәләре $R+$ күплегендә эквивалент, чөнки $x = 2$ аларның бердәнбер тамыры, ә R күплегендә бу тигезләмәләр тамырдаш түгел (R күплегендә икенче тигезләмәнең ике тамыры бар: $x = -2$, $x = 2$). Шуның өчен тигезләмәләрнең тамырдашлыгы тигезләмәнең чишелешләрен кайсы күплектә эзләүгә бәйләнгән.

Әгәр $f(x) = \varphi(x)$ тигезләмәсенең барлык чишелешләре $f_1(x) = \varphi_1(x)$, $f_2(x) = \varphi_2(x)$ тигезләмәләренең чишелешләре күплегендә булса һәм бу ике тигезләмәләрнең барлык гомумиләштерелгән чишелешләре берничә тигезләмәнең чишелешләре белән тәңгәл килсәләр, ул вакытта $f(x) = \varphi(x)$ тигезләмәсе

$f_1(x) = \varphi_1(x)$, $f_2(x) = \varphi_2(x)$ тигезләмәләре җыелмасына эквивалент була. Соңгы тигезләмәләр җыелмасын түбәндәге рәвештә язалар:

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x) = \varphi_1(x), \\ f_2(x) = \varphi_2(x). \end{array}\right.$$

Бу ике тигезләмә җыелмасының чишелешләре дип, $f_1(x) = \varphi_1(x)$ һәм $f_2(x) = \varphi_2(x)$ тигезләмәләренең гомумиләштерелгән барлык чишелешләре күплеге атала.

Тигезләмә һәм тигезләмәләр җыелмасының эквивалентлыгы түбәндәге рәвештә языла:

$$f(x) = \varphi(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f_1(x) = \varphi_1(x), \\ f_2(x) = \varphi_2(x). \end{array}\right.$$

Тигезләмә һәм тигезләмәләр җыелмасының тамырдашлыгы югарыда күрсәтелгәнчә билгеләнә, аларның тамырдашлыгы шулай ук билгесезләрнең мөмкин табылган кыйммәтләр күплегенә бәйләнгән.

Мәсәлән, R күплегендә $x^2 - 4 = 0$ тигезләмәсе һәм $\left\{\begin{array}{l} x - 2 = 0, \\ x + 2 = 0 \end{array}\right.$

тигезләмәләре җыелмасы тамырдаш була, ягъни

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x - 2 = 0, \\ x + 2 = 0. \end{array}\right.$$

Эквивалентлык (тамырдашлык) төшенчәсе *транзитивлык* үзлегенә ия.

Әгәр $f_1(x) = \varphi_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) = \varphi_2(x)$ һәм $f_2(x) = \varphi_2(x) \Leftrightarrow f_3(x) = \varphi_3(x)$ булса, ул вакытта $f_1(x) = \varphi_1(x) \Leftrightarrow f_3(x) = \varphi_3(x)$.

Әгәр $f_1(x) = \varphi_1(x)$ тигезләмәсенең барлык чишелешләре икенче $f_2(x) = \varphi_2(x)$ тигезләмәсенең чишелешләре күплегенә керсә, ул вакытта икенче тигезләмә беренче тигезләмәнең *нәтиҗәсе* дип атала. Бу очракта кабул ителгән тамгалау:

$$f_1(x) = \varphi_1(x) \Rightarrow f_2(x) = \varphi_2(x).$$

Мондый билгеләмәдән нәтиҗә тигезләмәнең төп тигезләмә тамырларыннан тыш *чит тамырлары* да булу мөмкинлеге күренә.

Мисаллар. 1. $\frac{x^3 - x^2 - 2x}{\sqrt{x} + 1} = 0 \Rightarrow x^3 - x^2 - 2x = 0$.

Беренче тигезләмәнең ике тамыры бар: $x = 0$, $x = 2$, ә икенче тигезләмә, бу тамырлардан башка, тагын бер тамырга ия: $x = -1$.

Бу тамыр беренче тигезләмә өчен чит тамыр, чөнки МТК беренче тигезләмә өчен $x > 0$ тигезсезлеге белән бирелә, ә $x = -1$ бу күплеккә керми.

2. $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$, чөнки беренче тигезләмәнең тамырлары икенче тигезләмәнең дә тамырлары булалар. Икенче тигезләмәнең $x = 1$ тамыры, беренче тигезләмәнең МТК керүенә карамастан, чит тамыр була, чөнки ул беренче тигезләмәне канәгатьләндерми.

1.2. Тигезләмә чишү өчен кагыйдәләр

1. Әгәр $g(x)$ функциясе $f(x)$ һәм $\varphi(x)$ функцияләренең МТӨнә кергән барлык саннар өчен дә мәгънәле булса, ул чакта $f(x) = \varphi(x) \Leftrightarrow f(x) + g(x) = \varphi(x) + g(x)$ була.

Нәтиҗә. Тигезләмәгә кергән һәр буынны, тамгасын үзгәртеп, тигезләмәнең икенче ягына күчерергә була:

$$f(x) = \varphi(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0.$$

Бу кагыйдә беренче тапкыр борынгы гарәп галиме Әл Хоризминың (783—850 еллар) "Китаб мөһтәсәр әл-җәбр вә әл-мукәбәлә" исемле китабында китерелә. Әл-җәбр сүзеннән — *алгебра*, Әл Хоризми исеменнән *алгоритм* сүзләре алынган.

Искәрмә. Бер билгесезле теләсә нинди тигезләмәне $F(x) = 0$ рәвешендә язып була.

2. А) Әгәр $g(x)$ функциясе $f(x)$ һәм $\varphi(x)$ функцияләренең МТӨ нә кергән барлык саннар өчен дә мәгънәле булса, ул чакта $f(x) = \varphi(x)$ тигезләмәсенең теләсә нинди тамыры $g(x)f(x) = g(x)\varphi(x)$ тигезләмәсенең дә тамыры була. Аны болай язып була:

$$f(x) = \varphi(x) \Rightarrow g(x)f(x) = g(x)\varphi(x).$$

В) Моннан тыш, әгәр $g(x) \neq 0$ булса, ул чакта:

$$f(x) = \varphi(x) \Leftrightarrow g(x)f(x) = g(x)\varphi(x).$$

Ниһаять, мисаллар карау алдыннан шуны әйтик: әгәр A шарты бозылса, ягъни тигезләмәнең МТӨ кимесә, ул чакта тигезләмә тамырының югалуы, әгәр B шарты бозылса, чит тамырлар барлыкка килүе мөмкин.

Мисаллар. а) $x^3 = 8$ тигезләмәсе бирелгән ди. Аның тамыры $x = 2$, МТК — барлык реаль саннар күплеге. Әгәр бу тигезләмәнең ике ягын да $g(x) = \frac{1}{x-2}$ функциясенә тапкырласак, ул чакта бу гамәл $x = 2$ тамырын югалтуга китерә, чөнки $\frac{x^3}{x-2} = \frac{8}{x-2}$ тигезләмәсе өчен $x = 2$ тамыр була алмый. Бу тамырны югалту A шар-

тының бозылуы аркасында килеп чыга, чөнки $x = 2$ функциянең билгеләнү өлкәсенә керми.

б) $x + 5 = 2$ тигезләмәсе бирелсен. Аның тамыры $x = -3$, МТК — барлык реаль саннар күплеге. Әгәр тигезләмәнең ике ягын да $g(x) = x^2 - 1$ функциясенә тапкырласак, ул вакытта яңа $(x^2 - 1)(x + 5) = 2(x^2 - 1)$ тигезләмәсе өч тамырлы була: $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$. Чит тамырларның килеп чыгуы B шартының бозылуы аркасында килеп чыга, чөнки $x = \pm 1$ булганда, $g(x) = x^2 - 1$ нульгә әйләнә.

в) $\cos 2x \cos 4x = \frac{1}{4}$ тигезләмәсен чишәбез.

Чишү. МТК: $x \in R$.

Беренче юл. Тигезләмәнең ике ягын да $\sin 2x$ ка тапкырлыйк:
$\sin 2x \cos 2x \cos 4x = \frac{1}{4}\sin 2x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 4x \cos 4x = \frac{1}{4}\sin 2x \Leftrightarrow \frac{1}{4}\sin 8x = \frac{1}{4}\sin 2x \Leftrightarrow \sin 8x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 3x \cos 5x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 3x = 0\\ \cos 5x = 0\end{array}\right. \Rightarrow$
$\Rightarrow 3x = k_1\pi,\ 5x = \frac{\pi}{2} + k_2\pi \Leftrightarrow x_1 = \frac{k_1\pi}{3},\ x_2 = \frac{\pi}{10} + \frac{k_2\pi}{5}$.

Чишкән вакытта без баштагы тигезләмәнең ике ягын да $\sin 2x$ ка тапкырладык. Бу функция $x = \frac{k\pi}{2}(k \in Z)$ булганда нульгә тигез, һәм бу саннар тигезләмәнең МТӨ нә керәләр. Шуңа күрә үзгәртелгән тигезләмәнең тамырлары арасында $x = \frac{k\pi}{2}$ тамырлары да бар. Әгәр төп тигезләмәгә бу тамырларны куеп карасак, аларның чит тамырлар икәне ачык күренә: чөнки $\cos k\pi \cdot \cos 2k\pi = \pm 1 \neq \frac{1}{4}$, $\cos 2k\pi = 1$, $\cos k\pi = (-1)^k$.

Димәк, табылган тамырлар күплегеннән төп тигезләмәгә чит булган $\left(\frac{\pi}{2}k\right)$ тамырларын алып ташларга кирәк. Алар $\frac{k_1\pi}{3} = \frac{\pi}{2}k$ һәм $\frac{\pi}{10} + \frac{k_2\pi}{5} = \frac{\pi}{2}k$ бәйләнешләреннән табыла: $k = \frac{2}{3}k_1$, $k = \frac{1}{5} + \frac{2k_2}{5}$, k_1, $k_2 \in Z$. Әгәр k_1, $k_2 \in Z$ һәм $k \in Z$ икәнен искә алсак, ул вакытта $k_1 = 3n$, $k_2 = 5m + 2$, $m, n \in Z$. Бу кыйммәтләрдән файдаланып, x_1 һәм x_2 өчен чит тамырларны табабыз: $x = \frac{\pi}{3}3n = n\pi$, $x = \pi / 10 + \pi(5m + 2) / 5 = \frac{\pi}{2} + m\pi$. Шулай итеп, баштагы тигезләмә өчен барлык чишелешләр күплеге түбәндәгечә бирелә: $x_1 = k_1\frac{\pi}{3}$, $(k_1 \neq 3n)$; $x_2 = \pi / 10 + k_2\pi / 5$, $(k_2 \neq 5n + 2)$, биредә m, $n \in Z$.

Искәрмә. Мәктәп дәреслекләрендә, бигрәк тә тригонометрик тигезләмәләр өчен, чит тамырлардан котылу методлары бирелмәгән диярлек, шуның өчен без, мисалның икенче юл белән чишү мөмкинлеге булуга карамастан, аны югарыда күрсәтелгән юл белән чишеп, чит тамырлардан котылу юлларын күрсәтүне кирәк таптык.

Икенче юл. $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1,\ \cos 2x = t,$

$$t\left(2t^2 - 1\right) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 8t^3 - 4t - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(t + \frac{1}{2}\right)\left(8t^2 - 4t - 2\right) = 0 \Rightarrow t_1 = -\frac{1}{2},$$

$$t_{2,3} = \left(1 \pm \sqrt{5}\right) / 4;\ \cos 2x = -\frac{1}{2},\ 2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi;\ \ \cos 2x = \frac{1\pm\ 5}{4},\ \ x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1\pm\ 5}{4} + k\pi.$$

3. $g(x)f(x) = g(x)\varphi(x)$ тигезләмәсе ике тигезләмә җыелмасына

эквивалент: $\left[\begin{array}{l} f(x) = \varphi(x), \\ g(x) = 0. \end{array}\right.$

Мәсәлән, $(x-1)\left(x^2 + 3x + 1\right) = (x-1)\left(x^2 - 2x + 2\right)$ тигезләмәсе

$\left[\begin{array}{l} x - 1 = 0, \\ x^2 + 3x + 1 = x^2 - 2x + 2 \end{array}\right.$ җыелмасына, ягъни

$\left[\begin{array}{l} x - 1 = 0, \\ 5x - 1 = 0 \end{array}\right.$ җыелмасына тамырдаш.

4. $f(x) = \varphi(x)$ тигезләмәсенең теләсә нинди чишелеше $f^n(x) = \varphi^n(x)$ тигезләмәсе өчен дә чишелеш булып тора. Биредә $n \in N$. Ләкин алар тамырдаш булмыйлар.

n так булганда, $f^n(x) = \varphi^n(x) \Rightarrow f(x) = \varphi(x);$

n җөп булганда, $f^n(x) = \varphi^n(x) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = \varphi(x), \\ f(x) = -\varphi(x) \end{array}\right.$

яки $f^n(x) = \varphi^n(x) \Rightarrow |f(x) = \varphi(x)$.

ИСКӘРМӘ. Әгәр нинди булса да тамыр беренче тигезләмәнең m дәрәҗәле тамыры булса, икенче тигезләмә аңа тамырдаш булсын өчен, бу тамыр икенче тигезләмәнең дә нәкъ m дәрәҗәле тамыры булырга тиеш. Мәсәлән, $x - 2 = 0$ һәм $(x-2)^4 = 0$ тигезләмәләрен тамырдаш дип булмый.

Мәсәлән, $(x+1)^2 = (2x+3)^2$ тигезләмәсе $|x+1| = |2x+3|$ тигезләмәсенә яки $\left[\begin{array}{l} x+1 = 2x+3, \\ x+1 = -2x-3 \end{array}\right.$ тигезләмәләр җыелмасына тамырдаш була.

5. Әгәр $F(x) = 0$ тигезләмәсенең сул ягы функцияләрнең суперпозициясе рәвешендә бирелсә $(F(x) = f(g(x)))$, $g(x)$ ны t белән алыштырырга мөмкин:

$$F(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x) = t_1, \\ g(x) = t_2, \\ g(x) = t_m, \end{array}\right.$$

монда $t_1, t_2, \ldots, t_m$ $f(t) = 0$ тигезләмәсенең тамырлары.

Тигезләмәләрне яңа билгесез кертеп чишү методы шушы кагыйдәгә нигезләнгән.

Мәсәлән, $\frac{x^2+1}{x} - 6\frac{x}{x^2+1} - 1 = 0$ тигезләмәсенең сул ягы f һәм g функцияләренең суперпозициясе: $t = g(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $f(t) = \frac{1}{t} - 6t - 1$.

$$\frac{1}{t} - 6t - 1 = 0 \Leftrightarrow 6t^2 + t - 1 = 0$$

тигезләмәсен чишеп табабыз: $t_1 = -\frac{1}{2}$, $t_2 = \frac{1}{3}$. Димәк,

$$\frac{x^2+1}{x} - 6\frac{x}{x^2+1} - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{x^2+1} = -\frac{1}{2}, \\ \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{3}. \end{array}\right.$$

6. Әгәр тигезләмәнең нинди дә булса күплектә ике ягы да бер үк тамгалы булса, бу күплектә

$$f(x) = \varphi(x) \Leftrightarrow f^{2n}(x) = \varphi^{2n}(x), \; n \in N.$$

Тигезләмәләрне чишкән вакытта, югарыда саналган үзгәртүләрдән тыш, башка төрле үзгәртүләр дә кулланыла. Бу бердәй рәвешүзгәртүләр еш кына тигезләмәләргә керүче функцияләрнең үзлекләренә таянып эшләнелә. Андый рәвешүзгәртүләрне бу бүлектә тигезләмәләрнең конкрет классын караганда күрсәтербез.

Әгәр тигезләмәне эшләгәндә тигезкөчле үзгәртүләр кулланылса, яки билгесезләр һәм параметрлар кергән аңлатмага өстәмә шартлар (чикләмәләр) куйганда яңа тигезләмә иске тигезләмәгә тамырдаш булып калса, бу вакытта тамырлар югалмый, һәм чит тамырлар да килеп чыкмый.

Әгәр тигезләмәне чишкәндә тигезкөчле булмаган рәвешүзгәртүләр кулланылса, бу вакытта, үзгәртелгән тигезләмәнең тамырларын тап-

кач, аларны башта бирелгән тигезләмәгә куеп тикшерергә кирәк. Әмма бу тикшерү кайвакытта авыр була. Иң әһәмиятлесе шунда ки, тигезкөчле булмаган үзгәрешләрнең МТӨ н тарайтмый торганын куллану бик мөһим, чөнки рәвешүзгәртүләр МТӨ н тарайтса, тигезләмәнең тамырлары югалуы мөмкин.

Беренче мисал. Тигезләмәне чишегез:

$$\sqrt{x-3}+\sqrt{x-2}=\sqrt{x}\,.$$

МТӨ $x \geq 3$ тигезсезлеге белән билгеләнә. Радикаллардан котылу өчен тигезләмәнең ике ягын да бер-бер артлы ике тапкыр квадратка күтәрәбез:

$$x-3+x-2+2\sqrt{(x-3)(x-2)}=x \Leftrightarrow 2\ (x-3)(x-2)=5-x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(x-3)(x-2)=25-10x+x^2 \Leftrightarrow 3x^2-10x-1=0\,.$$

Соңгы тигезләмә — төп тигезләмәнең нәтиҗәсе һәм аның ике тамыры бар:

$$x_1=\frac{5-\sqrt{28}}{3},\quad x_2=\frac{5+\ 28}{3}\,.$$

Беренче тамыр баштагы тигезләмә өчен чит тамыр, чөнки $x_1<0$ һәм МТӨ нә керми. Икенче тамырны тикшерү гаять авыр эш икәнлегенә укучы ышаныр дип уйлыйбыз. Әгәр тигезкөчле рәвешүзгәртү идеясен кулланcак, бишенче кагыйдә нигезендә $x \geq 3$ булганда, болай килеп чыга: $\sqrt{x-3}+\sqrt{x-2}=\sqrt{x} \Leftrightarrow 2\ (x-3)(x-2)=$

$$=5-x \Leftrightarrow \begin{cases}3x^2-10x-1=0,\\ 5-x \geq 0.\end{cases}$$

Димәк, тигезкөчлелекнең транзитивлык үзлегенә таянып, $3 \leq x \leq 5$ күплегендә $\sqrt{x-3}+\sqrt{x-2}=\sqrt{x} \Leftrightarrow 3x^2-10x-1=0$ икәнен исбат итәбез. x_2 соңгы күплеккә керә, шуның өчен ул төп тигезләмәнең тамыры була.

Икенче мисал. $\sqrt{x-5}-\sqrt{2x-1}=3+x^2\,.$

Монда МТӨ тигезсезлекләр белән билгеләнә:

$$\begin{cases}x-5 \geq 0,\\ 2x-1 \geq 0\end{cases} \Leftrightarrow x \geq 5\,.$$

Тигезләмәнең уң ягы барлык x лар өчен дә уңай булганлыктан, аның сул ягы да уңай булырга тиеш: $\sqrt{x-5} \geq \sqrt{2x-1}$. Ләкин бу тигезсезлекнең $x \geq 5$ күплегендә тамыры юк. Димәк, бу тигезләмәнең чишелеше юк. Әгәр тигезләмәнең ике ягының да уңай булуын өстәмә шарт итеп алмыйча, аларны квадратка күтәрсәк, ул вакытта нәтиҗә тигезләмә болай булыр иде:

$$x-5+2x-1-2\sqrt{(x-5)(2x-1)} = 9+6x^2+x^4 \Leftrightarrow$$
$$2\sqrt{(x-5)(2x-1)} = 15-3x+6x^2+x^4 .$$

Моны яңадан да квадратка күтәрсәк, сигезенче дәрәҗә тигезләмә килеп чыгар иде.

Шулай итеп, тигезләмәләрне чишкәндә теге яки бу ысулны куллану конкрет тигезләмәгә бәйләнгән дигән нәтиҗәгә киләбез. Ләкин һәрвакыт кулланыла торган рәвешүзгәртү тигезкөчлеме яки юкмы икәнлеген истә тотарга кирәк.

Югарыда әйтелгәннәрнең барысы да тигезләмәләр системасына да кагыла.

Әгәр берничә тигезләмәне берләштереп карасак: $A_1 = B_1$, $A_2 = B_2$, $\ldots, A_m = B_m$, ул вакытта безгә m тигезләмәдән торган система бирелгән була. Бу системаны болай язабыз: $\begin{cases} A_1 = B_1 , \\ A_m = B_m . \end{cases}$

Үзгәрешлеләрнең бер үк вакытта барлык аңлатмаларның мәгънәсе булган кыйммәтләре бу *үзгәрешлеләрнең мөмкин табылган кыйммәтләре өлкәсе* дип атала. Аларның күплеге системаның МТӨ дип атала, ягъни системаның МТӨ дип, барлык тигезләмәләрнең МТӨ ләренең гомуми өлеше, аларның кисешмәсенә кергән кыйммәтләр күплеге атала.

Мәсәлән, бер билгесезле ике тигезләмәдән торган

$$\begin{cases} x-2\sqrt{x} = 0, \\ x^2-8x+6 = 0 \end{cases}$$

системасы өчен МТК $x \geq 0$ тигезсезлеге белән бирелә; ә ике билгесезле һәм бер параметрлы ике тигезләмәдән торган

$$\begin{cases} x-y = 8a^2, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y} = 4a \end{cases}$$

системасы өчен МТК беренче чиректә ятучы нокталарның (x, y) рәвешле координатлары күплеге һәм монда $x \geq 0$, $y \geq 0$. a параметрының МТӨ булып, барлык реаль саннар күплеге R булуы билгеле.

Системаның чишелешләре күплеге дип, билгесезләрнең МТӨ нә һәм системага кергән һәр тигезләмәне канәгатьләндерә торган кыйммәтләр күплеге атала.

Мәсәлән, $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y} = 4, \\ x+y = 28 \end{cases}$

системасы өчен $x = 27$, $y = 1$ кыйммәтләре тигезләмәнең чишелешен тәшкил итәләр, чөнки бу ике сан ике тигезләмәнең дә чишелеше булып тора.

Тигезләмәләр системасын чишү — системаның чишелешләр күплеген табу, яки чишелешләрнең булмавын исбат итү дигән сүз. Әгәр системаның чишелеше булмаса, бу система тамырдаш булмаган тигезләмәләр системасы дип йөртелә.

2. РАЦИОНАЛЬ ТИГЕЗЛӘМӘЛӘР

Бер билгесезле бөтен рациональ тигезләмә дип,

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \ (a_0 \neq 0)$$

рәвешле тигезләмә атала. Монда $x \in R$, чөнки x ның һәр кыйммәте өчен дә тигезләмәнең сул ягында торган күпбуын билгеле бер кыйммәткә ия. Әгәр $a_0 = 1$ булса, ул вакытта тигезләмә *кителгән тигезләмә* дип атала.

$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ тигезләмәсенең сул ягы *n-дәрәҗә күпбуын* дип атала.

$P_n(x) = 0$ тигезләмәсе *n- дәрәҗә тигезләмә* дип атала.

Рациональ (вакланмалы рациональ) *тигезләмә* дип вакланма рәвешендә бирелгән

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0$$

тигезләмәсе атала. Монда $P_n(x)$ һәм $Q_n(x)$ — n нчы һәм m нчы дәрәҗә күпбуыннар. Тигезләмәдәге x билгесезенең МТӨ нә $Q_m(x) = 0$ тигезләмәсенең тамырлары булмаган барлык реаль саннар керә.

Түбәндә кайбер рациональ тигезләмәләрне чишү ысулларын тулырак карыйк.

2.1. Беренче дәрәҗә тигезләмә

$$ax + b = 0, \quad (a \neq 0)$$

рәвешле тигезләмә *беренче дәрәҗә тигезләмә* яисә *сызыкча тигезләмә* дип атала. Монда $x = -b / a$ тигезләмәнең бердәнбер тамыры була.

2.2. Икенче дәрәҗә тигезләмә

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (a \neq 0) \qquad (1.1)$$

тигезләмәсе бер билгесезле *квадрат тигезләмә,* яки бер билгесезле икенче дәрәҗә тигезләмә дип атала.

Тигезләмәнең тамырларын

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

формуласын кулланып табалар. (Бу формуланы исбатлау юлын исегезгә төшерегез.)

Әгәр дискриминант $D = b^2 - 4ac > 0$ булса, квадрат тигезләмәнең ике реаль тамыры була. $D = 0$ булса, квадрат тигезләмәнең икенче дәрәҗә тәңгәл тамырлары була. (Мәсәлән, $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0$, биредә $x = 1$ — икенче дәрәҗә тәңгәл тамыр.) Ниһаять, $D < 0$ булса, квадрат тигезләмәнең реаль саннар күплегендә тамырлары булмый, бу очракта тамырлар бер-берсенә иярешле комплекслы саннар булалар.

Искәрмә. Әгәр квадрат тигезләмәнең икенче коэффициенты җөп сан булса (ягъни $b = 2b_1$), тигезләмәнең тамырларын табу бераз гадиләшә:

$$x_{1,2} = \frac{-2b_1 \pm \sqrt{4b_1^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b_1 \pm \quad b_1^2 - ac}{a}.$$

Мисаллар. а) Тигезләмәне чишегез: $3x^2 + 5x - 2 = 0$.

Чишү. $x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3(-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{-5 \pm \quad 25 + 24}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = \frac{-5-7}{6} = -2,\; x_2 = \frac{-5+7}{6} = \frac{1}{3}$.

Тигезләмәнең ике тамыры бар: $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{1}{3}$.

б) Тигезләмәне чишегез: $5x^2 - 8x - 4 = 0$.

Чишү. Тигезләмәнең икенче коэффициенты җөп сан, шуның өчен икенче формуланы кулланырга мөмкин:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 5(-4)}}{5} = \frac{4 \pm \quad 16 + 20}{5} = \frac{4 \pm 6}{5}.$$

Җавап. $x_1 = -\frac{2}{5}$; $x_2 = 2$.

в) Тигезләмәне чишегез: $2x^2 - x + 1/8 = 0$.

Чишү. Хисаплауны гадиләштерү өчен тигезләмәнең ике ягын да 8 гә тапкырлыйбыз һәм баштагы тигезләмәгә тамырдаш тигезләмә табабыз.

$$16x^2 - 8x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{16} = \frac{1}{4}.$$

Тигезләмәнең икенче дәрәҗә тәңгәл тамыры бар.

Җавап. $x_{1,2} = 1/4$.

г) Тигезләмәне чишегез: $x^2 + 3x + 5 = 0$.

Чишү. $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4 \cdot 5}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-20}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-11}}{2}$

Бу тигезләмәнең реаль саннар күплегендә чишелеше юк.

Виет теоремасы (туры теорема). Әгәр x_1 һәм x_2 тигезләмәнең (1.1) тамырлары булса, ул вакытта түбәндәге бәйләнешләр урынлы:

$$x_1 + x_2 = -b/a, \quad x_1 x_2 = c/a. \qquad (1.2)$$

Киресенчә, әгәр ике сан (x_1 һәм x_2) (1.2) бәйләнешендә булсалар, ул вакытта алар квадрат тигезләмәнең (1.1) тамырлары булалар. (Бу Виет теоремасына кире теорема дип атала.)

Мисаллар. а) Тамырларның квадратлары суммасы иң кечкенә булсын өчен, $x^2 - (2a-1)x - 4a - 3 = 0$ тигезләмәсендәге a параметрының кыйммәтен табыгыз.

Чишү. Виет теоремасы формулаларын кулланабыз:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (2a-1)^2 + 2(4a+3) =$$
$$= 4a^2 + 4a + 7 = (2a+1)^2 + 6.$$

$a = -\frac{1}{2}$ булганда, $x_1^2 + x_2^2$ үзенең иң кечкенә кыйммәтен ала.

б) $ax^2 + bx + c = 0$ квадрат тигезләмәсенең тамырлары x_1 һәм x_2. Тамырлары $\frac{x_1}{x_2}$ һәм $\frac{x_2}{x_1}$ булган яңа тигезләмә төзегез.

Чишү. $y^2 + py + q = 0$ — яңа тигезләмә. Мәсьәләнең шарты буенча $y_1 = x_1 / x_2$, $y_2 = x_2 / x_1$. Димәк, $P = -\left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right) = -\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2}$, $q = y_1 \cdot y_2 = 1$.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}, \quad x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}.$$

Шулай итеп: $P = -\frac{b^2 - 2ac}{a^2} : \frac{c}{a} = \frac{2ac - b^2}{ac}$.

Димәк, $y^2 + \frac{2ac - b^2}{ac} y + 1 = 0 \Leftrightarrow acy^2 + (2ac - b^2)y + ac = 0$ без эзләгән тигезләмә була.

Күптөрле тигезләмәләр яңа билгесезләр керткәннән соң квадрат тигезләмәгә әверелә.

Мисаллар. Тигезләмәләрне чишегез: а) $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=-\frac{5}{2}$.

Чишү. МТӨ: $x\neq 0$. Әгәр $\frac{x^2+1}{x}=t$ дип билгеләсәк, $t+1/t=-5/2$ рәвешле тигезләмәдән квадрат тигезләмә килеп чыга: $2t^2+5t+2=0$. Монда $t_1=-2$; $t_2=-\frac{1}{2}$. $\frac{x^2+1}{x}=-2$ тигезләмәсе $x=-1$ тәңгәл тамырларына ия; $\frac{x^2+1}{x}=-\frac{1}{2}$ тигезләмәсенең реаль саннар күплегендә тамыры юк.

Җавап. $x_{1,2}=-1$.

б) $x^2+4\cdot x^{-2}=x-2/x+4$.

Чишү. МТӨ: $x=0$. $x-2/x$ ны t аша билгелик. Ике якны да квадратка күтәрсәк,

$x^2-4+\frac{4}{x^2}=t^2\Leftrightarrow x^2+\frac{4}{x^2}=t^2+4$ тигезләмәсен табабыз. Баштагы тигезләмә $t^2+4=t+4$ тигезләмәсенә әверелә. Моннан $t_1=0$, $t_2=1$. $x=\pm\ 2$ икәнен $x-2/x=0$ тигезләмәсен чишеп табабыз. $x-2/x=1$ тигезләмәсенең тамырлары $x_3=-1$, $x_4=2$ була.

Җавап. $x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$; $x_3=-1$; $x_4=2$.

в) $\frac{4x}{4x^2-8x+7}+\frac{3x}{4x^2-10x+7}=1$.

Чишү. Бу тигезләмә x ның барлык кыйммәтләре өчен дә билгеләнгән, ягъни МТӨ барлык санлы туры. (Ни өчен?)

Ике кушылучының да ваклаучыларын һәм санаучыларын x ка бүлсәк:

$\frac{4}{4x-8+7/x}+\frac{3}{4x-10x+7/x}=1$, монда $x\neq 0$. $\left(4x+\frac{7}{x}\right)$ не t аша билгелибез. Ул вакытта тигезләмә $\frac{4}{t-8}+\frac{3}{t-10}=1$ рәвешен ала. Монда $t\neq 8$, $t\neq 10$. $t^2-25t+144=0\Rightarrow t_1=9$, $t_2=16$.

Димәк, $4x+\frac{7}{x}=9$, $4x+\frac{7}{x}=16$. Беренче тигезләмәнең реаль тамырлары юк. Икенче тигезләмәнең тамырлары $x_1=1/2$, $x_2=7/2$.

Җавап. $x_1=1/2$; $x_2=7/2$.

Күнегүләр

1. $112x^2 - 1073x + 448 = 0$.

2. $x^2 + 3x - 15 = 0$ тигезләмәсен чишмичә генә тамырларының квадратлары һәм кублары суммаларын табыгыз.

3. $x^2 - 8x + c = 0$ тигезләмәсенең тамырлары $x_1^2 + x_2^2 = 34$ тигезлеге белән бәйләнгән. Тигезләмәне чишегез.

4. $x^2 - 3ax + a^2 = 0$ тигезләмәсенең тамырлары $x_1^2 + x_2^2 = 112$ тигезлеге белән бәйләнгән. a параметрының зурлыгын табыгыз.

5. a нинди реаль сан булганда, $x^2 + ax + a - 2 = 0$ тигезләмәсе тамырларының квадратлары суммасы иң кечкенә була?

6. $x^2 + ax + 1 = 0$ һәм $x^2 + x + a = 0$ тигезләмәләренең кимендә бер уртак тамырлары булсын өчен, a ның кыйммәтләре нинди булырга тиеш?

7. $ax^2 + bx + c = 0$ квадрат тигезләмәсе бирелгән. Тамырлары бирелгән тигезләмәнең тамырларына кире вакланмалар булган тигезләмә төзегез.

8. $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ тигезләмәсенең тамырлары x_1 һәм x_2 $[-2; 4]$ кисемтәсенә керсен өчен, m ның кыйммәте нинди саннар арасында булырга тиеш?

9. c ның нинди кыйммәте өчен $8x^2 - 6x + 9c^2 = 0$ тигезләмәсенең тамырлары $x_1 = x_2^2$ тигезлеге белән бәйләнә?

10. $x^2 + px + q = 0$ квадрат тигезләмәсенең тамырлары $x_2 - x_1 = 5$, $x_2^3 - x_1^3 = 35$ тигезлекләре белән бәйләнгәннәр. Тигезләмәнең p һәм q коэффициентларын табыгыз.

11. $\frac{10}{x^2+x+1} = 6 - x - x^2$.

12. $\frac{4}{x^2+4} + \frac{5}{x^2+5} = 2$.

13. $\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 10\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right)$.

14. $\frac{2x}{2x^2-5x+3} + \frac{13x}{2x^2+x+3} = 6$.

15. $\left(x^2 - 6x\right)^2 - 2(x - 3)^2 = 81$.

16. $\frac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15} = \frac{3x}{x^2-8x+15}$.

17. $4x^2 + 12x + 12/x + 4/x^2 = 47$.

18. $2\left(x^2 + x + 1\right)^2 - 7\left(x - 1\right)^2 = 13\left(x^3 - 1\right).$

19. $\frac{30}{x^2-1} - \frac{13}{x^2+x+1} = \frac{7+18x}{x^3-1}.$

20. $\frac{2}{x^2-4} + \frac{x-4}{x^2+2x} = \frac{1}{x^2-2x}.$

Җаваплар

1. $x_1 = 64 / 7;\ x_2 = 7 / 16.$ **2.** 39; – 162. **3.** 3; 5.

4. $a = \pm 4.$ **5.** $a = 1.$ **6.** $a = -2.$ **7.** $cx^2 + bx + a = 0.$

8. $-1 < m < 3.$ **9.** $c = \pm\frac{1}{3}.$ **10.** $p_{1,2} = \pm 1;\ q_{1,2} = -6.$

11. $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2};\ x_{3,4} = \frac{-1\pm\ \ 17}{2}.$ **12.** $x_1 = x_2 = 0.$

13. $x_1 = -2;\ x_2 = 6;\ x_{3,4} = 3 \pm\ \ 21.$ **14.** $x_1 = \frac{3}{4};\ x_2 = 2.$

15. $x_{1,2} = 3;\ x_{3,4} = 3 \pm 2\ \ 5.$ **16.** $x_{1,2} = 7 \pm \sqrt{34}.$

17. $x_1 = 2;\ x_2 = 0{,}5;\ x_{3,4} = \left(-11 \pm\ \ 105\right) / 4.$

18. $x_1 = 2;\ x_2 = 4,\ x_3 = -1;\ x_4 = -0{,}5.$ **19.** 9; – 4. **20.** 3.

2.3. Икебуынлы тигезләмәләр

$$ax^n \pm b = 0,\ \ \left(a > 0,\ b > 0,\ n \in N\right)$$

рәвешендәге тигезләмә *икебуынлы* тигезләмә дип атала.

Бу тигезләмә $x = t\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ рәвешле яңа билгесез керткәндә $t^n \pm 1 = 0$ тигезләмәсенә әйләнә. Соңгы тигезләмәнең берничә дәрәҗәсен карыйк.

1. $n=2$ а) $t^2 - 1 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \pm 1.$

б) $t^2 + 1 = 0$ (чишелеше юк).

2. $n=3$ а) $t^3 - 1 = 0$ тигезләмәсе ике тигезләмә җыелмасына эквивалент: $\left[\begin{array}{l} t - 1 = 0, \\ t^2 + t + 1 = 0. \end{array}\right.$ Бу тигезләмәләрнең беренчесенең тамыры — $t=1$, ә икенчесенең реаль тамыры юк.

б) $t^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t + 1 = 0, \\ t^2 - t + 1 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow t = -1.$

3. $n=4.$ а) $t^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^2 - 1 = 0, \\ t^2 + 1 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow t_{1,2} = \pm 1.$

б) $t^4 + 1 = 0$ (чишелеше юк).

4. $n=6$ а) $t^6 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^3 + 1 = 0, \\ t^3 - 1 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow t_{1,2} = \pm 1.$

б) $t^6 + 1 = 0$ (чишелеше юк).

5. $n=8$ а) $t^8 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^4 - 1 = 0, \\ t^4 + 1 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow t_{1,2} = \pm 1.$

б) $t^8 + 1 = 0$ (чишелеше юк).

2.4. Өчбуынлы тигезләмә

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0, \quad (a \neq 0, \ n \in N) \qquad (1.3)$$

тигезләмәсе *өчбуынлы* тигезләмә дип атала. $n=2$ булса, бу тигезләмә *биквадрат* тигезләмә була. Билгесезне $x^n = t$ дип алыштырсак, тигезләмә квадрат тигезләмәгә әйләнә: $at^2 + bt + c = 0$. Аны чишеп, икебуынлы тигезләмә табабыз, ягъни $x^n = t_{1,2}$ була.

Мәсәлән, $16x^8 - 257x^4 + 16 = 0$ тигезләмәсе бирелсен.

$x^4=t$ дип алсак, квадрат тигезләмә табабыз:

$$16t^2 - 257t + 16 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{257 \pm \ 257 - 4 \cdot 16^2}{32} =$$

$$= \frac{257 \pm \sqrt{(257 - 2\cdot 16)(257 + 2\cdot 16)}}{32} = \frac{257 \pm \ 15^2 \cdot 17^2}{32} =$$

$$= \frac{257 \pm 15\cdot 17}{32} = \frac{257 \pm 255}{32} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{16}; \ t_2 = 16.$$

Моннан соң икебуынлы тигезләмәләр табабыз:

а) $x^4 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{1}{2}.$

б) $x^4 = 16 \Leftrightarrow \left(x^2 - 4\right)\left(x^2 + 4\right) = 0 \Rightarrow x_{2,4} = \pm 2.$

Җавап. $x_{1,2} = \pm 0{,}5; \ x_{3,4} = \pm 2.$

2.5. Дүртенче дәрәҗә кайтарылма тигезләмәләр

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \ (a, e \neq 0) \tag{1.4}$$

рәвешле тигезләмә, әгәр

$$\frac{e}{a} = \left(\frac{d}{b}\right)^2 \tag{1.5}$$

тигезлеге үтәлсә, *кайтарылма* тигезләмә дип атала.

Монда $x \neq 0$ (ни өчен?), шуның өчен x^2 ка бүлеп, баштан һәм азактан тигез ераклыкта торган буыннарны берләштереп, төп тигезләмәгә эквивалент булган икенче тигезләмә табабыз:

$$a\left(x^2 + \frac{e}{ax^2}\right) + b\left(x + \frac{d}{bx}\right) + c = 0.$$

$t = x + d / bx$ дип тамгалыйбыз. (1.5) тигезлеген куллансак,

$x^2 + \frac{e}{ax^2} = x^2 + \frac{d^2}{b^2x^2} = \left(x + \frac{d}{bx}\right)^2 - 2\frac{d}{b} = t^2 - 2\frac{d}{b}$ тигезләмәсен һәм, шуннан чыгып, t өчен яңа икенче дәрәҗә тигезләмә табабыз:

$$at^2 + bt + c - 2a\frac{d}{b} = 0. \tag{1.6}$$

x ның кыйммәтен түбәндәге тигезләмәләрдән табабыз:

$$\left[\begin{aligned} x + \frac{d}{bx} &= t_1, \\ x + \frac{d}{bx} &= t_2. \end{aligned}\right.$$

Монда t_1 һәм t_2 — (1.6) тигезләмәсенең тамырлары.

Искәрмә. $d=b$ булганда, (1.4) тигезләмәсе *симметрияле* тигезләмә дип атала, бу очракта, әгәр x_0 тигезләмәнең тамыры булса, $\frac{1}{x_0}$ дә аның тамыры була.

$b = -d$ булганда, тигезләмә *кыек симметрияле* тигезләмә дип атала.

Мисал. Тигезләмәне чишегез: $2x^4 - 21x^2 + 74x^2 - 105x + 50 = 0.$

Чишү. Бу тигезләмә өчен (1.5) шарты үтәлә.

Чөнки $\frac{e}{a} = \frac{50}{2} = 25 = \left(\frac{d}{b}\right)^2 = \left(\frac{-105}{-21}\right) = 25$. Бу тигезләмәне x^2 ка бүлеп, баштан һәм азактан тигез ераклыкта торган буыннарны берләштерәбез һәм тигезләмәне

$$2\left(x^2 + \frac{25}{x^2}\right) - 21\left(x + \frac{5}{x}\right) + 74 = 0$$

рәвешле язабыз. Аннан соң $x + \frac{5}{x}$ ны t аша билгелибез һәм, $x^2 + \frac{25}{x^2} = t^2 - 10$ икәнен исәпкә алып, икенче дәрәҗә тигезләмәгә

киләбез: $2t^2 - 21t + 54 = 0$. Бу тигезләмәнең тамырлары $t_1 = 4{,}5$; $t_2 = 6$.

Төп тигезләмәнең тамырларын түбәндәге тигезләмәләрне чишеп табабыз:

$$\left[\begin{array}{l} x + \frac{5}{x} = \frac{9}{2}, \\ x + \frac{5}{x} = 6. \end{array}\right.$$

Җавап. $x_1 = 1$; $x_2 = 2$;

$x_3 = \frac{5}{2}$; $x_4 = 5$.

2.6. $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$

рәвешле тигезләмә

Бу тигезләмә x ны $t - \frac{a+b}{2}$ га алыштырганнан соң биквадрат тигезләмәгә әйләнә.

Мисал. Тигезләмәне чишегез: $(x + 5)^4 + (x + 3)^4 = 2$.

Чишү. Монда $a=5$, $b=3$. Димәк, $x = t - \frac{5+3}{2} = t - 4$. Билгесез t өчен тигезләмә $(t + 1)^4 + (t - 1)^4 = 2$ рәвешенә керә. Моннан $\left(t^2 + 2t + 1\right)^2 + \left(t^2 - 2t + 1\right)^2 = 2$. Бу тигезләмә, $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$ формуласын кулланып гадиләштергәч, $t^4 + 6t^2 = 0$ тигезләмәсенә әверелә.

Димәк, $t^2\left(t^2 + 6\right) = 0$, $t_{1,2} = 0$

Җавап. $x_{1,2} = -4$.

Искәрмә. Әгәр бирелгән тигезләмәдә кушылучыларны дүртенче дәрәҗәгә күтәреп гадиләштергән булсак, $x^4 + 16x^3 + 102x^2 + 304x + 352 = 0$ рәвешле тигезләмә тапкан булыр идек. Ә инде бу тигезләмәне чишү шактый авыр булачак.

2.7. $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = e$

рәвешле тигезләмә

Әгәр $a < b < c < d$ һәм $a + d = b + c$ булса, бу тигезләмә квадрат тигезләмәгә әверелә.

Мисал. Тигезләмәне чишегез: $(x - 3)(x + 1)(x + 2)(x + 6) = -96$.

Чишү. Монда $a = -3$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 6$.

Бу тигезләмәнең сул яктагы тапкырлаучыларын группалаштырып, $[(x-3)(x+6)][(x+1)(x+2)] = -96$ рәвешле тигезләмәгә күчәбез. Моннан $(x^2+3x-18)(x^2+3x+2) = -96$. x^2+3x ны t аша билгеләп, квадрат тигезләмә табабыз. $(t-18)(t+2) = -96 \Rightarrow$ $\Rightarrow t^2 - 16t + 60 = 0 \Rightarrow t_1 = 6,\ t_2 = 10$. Шулай итеп, $x^2+3x = 6$, $x^2+3x = 10$.

Җавап. $x_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{33}}{2}$;
$x_3 = -5;\ x_4 = 2$.

Күнегүләр

1. $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7) = 1680$.

2. $x^4 - 50/(2x^4-7) = 14$.

3. $x^4 + 2x^3 - 18x^2 - 10x + 25 = 0$.

4. $2x^4 + 3x^3 - 13x^2 - 6x + 8 = 0$.

5. $(8x+7)^2(4x+3)(x+1) = 4{,}5$.

6. $(x-4{,}5)^4 + (x-5{,}5)^4 = 1$.

7. $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 16$.

8. $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$.

9. $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) = 9$.

10. $(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1) = 5$.

Җаваплар

1. $x_1 = -1;\ x_2 = 12$.

2. $x_{1,2} = \pm 2;\ x_{3,4} = \pm\sqrt[4]{\frac{3}{2}}$.

3. $x_1 = -5;\ x_2 = 1;\ x_{3,4} = 1 \pm \ 6$.

4. $x_1 = -1;\ x_2 = 2;\ x_{3,4} = (-5 \pm \ 57)/4$.

5. $x_1 = -0{,}5;\ x_2 = -\frac{5}{4}$.

6. $x_1 = 4{,}5;\ x_2 = 5{,}5$.

7. $x_1 = -3;\ x_2 = -5$.

8. $x_{1,2} = (3 \pm \sqrt{5})/2$.

9. $x_{1,2} = -4;\ x_{3,4} = -4 \pm \ 10$.

10. $x_1 = 0{,}5;\ x_2 = -1/12$.

2.8. Тамырлар сайлау һәм тапкырлаучыларга таркату методлары белән югары дәрәҗә тигезләмәләрне чишү

n-дәрәҗә күпбуынны карыйк, монда $n \in N$:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots a_{n-1}x + a_n .$$

Күпбуындагы x урынына c санын куйганда килеп чыккан зурлык $P_n(c)$ бу күпбуынның $x=c$ булгандагы кыйммәте дип атала.

Мәсәлән, $x=0$ булганда, $P_2(x) = x^2 + 3x + 2$ күпбуынының кыйммәте 2 гә тигез.

$P_n(x)$ һәм $Q_n(x)$ күпбуыннары x ның һәр кыйммәте өчен дә бер үк зурлыкка ия булсалар, *бердәй күпбуыннар* дип аталалар. Бердәй булу өчен бу күпбуыннарның бер үк дәрәҗәдәге буыннары алдындагы коэффициентларның үзара тигез булуы кирәк, һәм шул җитә дә.

Теләсә нинди дәрәҗәле һәм коэффициентлары теләсә нинди саннар булган күпбуыннар *күпбуыннар күплеген* тәшкил итә. Бу күплеккә нуль дәрәҗәле күпбуын (нульгә тигез булмаган даими сан) һәм барлык коэффициентлары нульгә тигез булган күпбуын да керә.

Күпбуыннар өчен, саннардагы кебек үк, кушу, алу, тапкырлау гамәлләре билгеләнгән.

Мәсәлән, күпбуыннар өчен түбәндәге гамәлләрне үтәргә мөмкин:

$$P_2(x) + P_3(x) = 2x^2 - 1 + x^3 - 2x^2 + 3x + 2 = x^3 + 3x + 1;$$

$$P_2(x) - P_3(x) = 2x^2 - 1 - \left(x^3 - 2x^2 + 3x + 2\right) = -x^3 + 4x^2 - 3x - 3;$$

$$P_2(x) \cdot P_3(x) = \left(2x^2 - 1\right)\left(x^3 - 2x^2 + 3x + 2\right) = 2x^5 - 4x^4 + 6x^3 +$$

$$+ 4x^2 - x^3 + 2x^2 - 3x - 2 = 2x^5 - 4x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 3x - 2.$$

Искәрмә. Ике буын тапкырчыгышының дәрәҗәсе тапкырлаучыларның дәрәҗәләре суммасына тигез.

Күпбуыннарны бүлү. $n \geq m$ булганда, теләсә нинди $P_n(x)$ һәм $Q_m(x)$ күпбуыннары өчен түбәндәге бердәйлеккә кергән $D_k(x)$ һәм $R_e(x)$ күпбуыннарын һәрвакыт табарга мөмкин:

$$P_n(x) = Q_m(x)D_k(x) + R_e(x). \qquad (1.7)$$

Монда $R_e(x)$ ның дәрәҗәсе $Q_m(x)$ дәрәҗәсеннән һәрвакыт ким $(l < m)$. Бу бердәйлекне канәгатьләндерүче күпбуыннар $D_k(x)$ һәм $R_e(x)$ бердәнбер мәгънәле булып билгеләнәләр. Монда $D_k(x)$ *өлеш*, $R_e(x)$ *калдык күпбуын* дип атала. Әгәр $R_e \equiv 0$ булса, $P_n(x)Q_m(x)$ ка калдыксыз бүленә диләр.

Гадәттә, күпбуыннарны бүлү өчен "почмаклап бүлү" схемасын куллану уңайлы.

Мисаллар: а) $2x^4 - x^3 - 3x^2 - 5x + 6$ күпбуынын $x^2 + x + 1$ күпбуынына бүлегез.

Бүлүне почмаклап эшлибез.[1)]

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 5x + 6 \\ 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 \qquad\qquad \end{array} & x^2 + x + 1 \\ \cline{2-2}
\hline
-\begin{array}{r} -3x^3 + x^2 - 5x + 6 \\ -3x^3 - 3x^2 - 3x \qquad \end{array} & 2x^2 - 3x + 4 \\
\hline
-\begin{array}{r} 4x^2 - 2x + 6 \\ 4x^2 + 4x + 4 \end{array} & \\
\hline
-6x + 2 &
\end{array}
$$

Монда $D_2(x) = 2x^2 - 3x + 4$; $R = -6x + 2$ һәм түбәндәге бердәйлек урынлы: $2x^4 - x^3 + 3x^2 - 5x + 6 = \left(x^2 + x + 1\right)\left(2x^2 - 3x + 4\right) + \left(-6x + 2\right)$.

б) $x^3 + 1$ күпбуынын $x + 1$ күпбуынына бүлегез.

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} x^3 + 0x^2 + 0x + 1 \\ x^3 + x^2 \qquad\qquad \end{array} & x + 1 \\ \cline{2-2}
\hline
-\begin{array}{r} -x^2 + 0x + 1 \\ -x^2 - x \qquad \end{array} & x^2 - x + 1 \\
\hline
-\begin{array}{r} x + 1 \\ x + 1 \end{array} & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Монда калдык $R_0(x) \equiv 0$.

Безу теоремасы. *$P_n(x)$ күпбуынын $x - c$ аермасына бүлгәндә килеп чыккан калдык бу күпбуынның $x = c$ булгандагы кыйммәтенә тигез була, ягъни $R = P_n(c)$.*

[1)] "Почмаклап бүлү" схемасы китапның кушымтасында тулырак итеп бирелгән.

Дөрестән дә, $P_n(x)$ күпбуынын $x-c$ аермасына бүлгәндә, (1.7) тигезлеге $P_n(x)=(x-c)D_{n-1}(x)+R_0$ рәвешен ала. Монда R_0 — нинди дә булса даими сан, чөнки R_0 нең дәрәҗәсе бердән ким. Теореманы исбатлау өчен x урынына c ны куюю җитә, чөнки $R_0=P_n(c)$.

Мәсәлән, $6x^3-7x^2-16x+12$ күпбуынын $x+1$ гә бүлгәндә, калдык 15 кә тигез булыр, чөнки $6\cdot 2^3-7\cdot 2^2-16\cdot 2+12=0$.

Билгеләмә. *Әгәр $P_n(c)=O$ булса, ул вакытта c саны $P_n(x)$ күпбуынының тамыры дип атала.*

Нәтиҗә. (Безу теоремасының нәтиҗәсе.) Әгәр c саны $P_n(x)$ның тамыры булса, ул вакытта $P_n(x)$ күпбуыны $x-c$ аермасына калдыксыз бүленә.

Дөрестән дә, әгәр c саны $P_n(x)$ күпбуынының тамыры булса, $P_n(c)=0$, димәк, $R_0=P_n(c)=0$ була. Шулай итеп, әгәр $x=c$ күпбуынның тамыры булса, ул вакытта

$$P_n(x)=(x-c)P_{n-1}(x).$$

Алгебраның төп теоремасы нигезендә, n-дәрәҗә теләсә нинди күпбуын бер генә булса да тамырга ия (реаль яки комплекслы).

Бу теореманы һәм Безу теоремасының нәтиҗәсен кулланып, n-дәрәҗә күпбуынның тамырлары саны n га тигез икәнен исбатларга һәм күпбуынны түбәндәгечә итеп таркатырга була:

$$P_n(x)=a_0(x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_n),$$

монда $c_1, c_2, c_3 \ldots c_n$ — күпбуынның тамырлары, a_0 — төп коэффициент. Килеп чыккан таркалышның бердәнбер икәнен (башка тамырларның юклыгын) исбатларга мөмкин.

Күпбуынны болай күрсәтү аны *сызыкча тапкырлаучыларга таркату* дип атала. Бу тамырларның үзара тигез булулары мөмкин, шуның өчен күпбуынның сызыкча тапкырлаучыларга таркалуы, гомумән, түбәндәге рәвештә бирелә:

$$P_n(x)=a_0(x-c_1)^{m1}(x-c_2)^{m2}\ldots(x-c_k)^{mk}.$$

Әгәр $m_i=1$ булса, c_i — *гади тамыр,* әгәр $m_i\geq 2$ булса, c_i — *кабатлы тамыр* дип атала (икегә, өчкә һ. б. кабатлы).

Мисал. $6x^3-7x^2-16x+m=0$ тигезләмәсенең бер тамыры $x_1=2$ булса, ирекле буынны һәм башка тамырларны табыгыз.

Чишү. Әгәр $x_1=2$ тигезләмәнең тамыры булса, $6\cdot 2^3-7\cdot 2^2-$ $-16\cdot 2+m=0$. Димәк, $m=12$.

Безу теоремасы буенча тигезләмәнең сул ягы $x-2$ аермасына калдыксыз бүленә.

Өлешне табабыз:

$$\begin{array}{l|l} 6x^3 - 7x^2 - 16x + 12 & x - 2 \\ \underline{-\,6x^3 - 12x^2} & \overline{6x^2 + 5x - 6} \\ \qquad 5x^2 - 16x + 12 & \\ \qquad \underline{-\,5x^2 - 10x} & \\ \qquad\qquad -6x + 12 & \\ \qquad\qquad \underline{-\,(-6x + 12)} & \\ \qquad\qquad\qquad 0 & \end{array}$$

Шулай итеп, баштагы тигезләмәне түбәндәге рәвештә язарга мөмкин: $(x-2)(6x^2+5x-6)=0$. Икенче тапкырлаучының тамырларын табып, баштагы тигезләмәне тулай таркалган рәвештә табабыз: $6(x-2)\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)=0$. Тигезләмә өч гади тамырга ия.

Коэффициентлары бөтен саннар булган n-дәрәҗә алгебраик тигезләмәләрне:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (1.8)$$

чишкәндә, түбәндәге фикер файдалы булачак.

Теорема. (1.8) тигезләмәсенең бөтен тамырлары ирекле буынның бүлүчеләре арасында гына булырга мөмкин.

Мисаллар. а) Тигезләмәне чишегез: $x^4+x^3+x^2+3x+2=0$.

Чишү. Коэффициентлары барысы да уңай булганлыктан, бу тигезләмәнең тамырлары тискәре саннар арасында гына булуы мөмкин. Монда ирекле буын 2 гә тигез. Бу тигезләмәнең бөтен тамырлары, теорема буенча, ± 1, ± 2 саннары арасында гына була ала.

Югарыда әйткәнебезчә, $+1$ һәм $+2$ саннары тамыр була алмый. -2 саны шулай ук тамыр түгел, әмма -1 тигезләмәнең тамыры була, чөнки $(-1)^4+(-1)^3+(-1)^2+3(-1)+2=0$.

Башка тамырларны табу өчен, Безу теоремасы буенча тигезләмәне таркатабыз:

$$\begin{array}{l|l} x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 2 & x + 1 \\ \underline{-\,x^4 + x^3} & \overline{x^3 + x + 2} \\ \qquad x^2 + 3x + 2 & \\ \qquad \underline{-\,x^2 + x} & \\ \qquad\qquad 2x + 2 & \\ \qquad\qquad \underline{-\,2x + 2} & \\ \qquad\qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$x^3 + x + 2$ күпбуынының шулай ук $x = -1$ булган тамыры бар. Димәк,

$$\begin{array}{r|l} x^3 + x + 2 & x+1 \\ \hline -(x^3 + x^2) & x^2 - x + 2 \\ -x^2 + x + 2 & \\ -(-x^2 - x) & \\ 2x + 2 & \\ -(2x + 2) & \\ 0 & \end{array}$$

Шулай итеп: $x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 2 = (x+1)^2\left(x^2 - x + 2\right)$

$x^2 - x + 2 = 0$ тигезләмәсенең реаль тамырлары юк.

Җавап: $x_{1,2} = -1$.

Искәрмә. (1.8) тибындагы тигезләмәләрне чишкәндә $x = a$ тамыр булса, тигезләмәнең сул ягында $x = a$ га тигез булган тапкырлаучыны бүлеп чыгару ысулын файдаланырга мөмкин.

Мәсәлән, $x^3 - 3x + 2 = 0$ тигезләмәсенең коэффициентлар суммасы нульгә тигезлегеннән $x = 1$ нең тамыр булуы килеп чыга. Тигезләмәнең сул ягын $x - 1$ гә бүлү урынына, башкача эшлибез: $x^3 - 3x + 2 = x^3 - x - 2(x-1) = x\left(x^2 - 1\right) - 2(x-1) = (x-1)\left(x^2 + x - 2\right)$.

Димәк, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$.

б) $10x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0$.

Ирекле буынның бүлүчеләре ± 1. Ләкин бу саннар тамыр түгел. Димәк, бу тигезләмәнең бөтен тамыры юк. x ны $1/t$ га алыштырабыз. Үзгәрткәннән соң $t^3 - 2t^2 - 3t + 10 = 0$ тигезләмәсенә күчәбез. Ирекле буынның бүлүчеләре ± 1, ± 2, ± 5, ± 10. Үзгәртелгән тигезләмәнең тамыры -2 гә тигез. Тигезләмәнең сул ягында $t + 2$гә тигез булган тапкырлаучыны аерып чыгарабыз: $t^3 - 2t^2 - 3t + 10 = t^3 + 8 - \left(2t^2 + 3t - 2\right) = (t+2)\left(t^2 - 2t + 4\right) - 2(t+2)\left(t - \frac{1}{2}\right) = (t+2)\left(t^2 - 4t + 5\right)$. $t = -2$ бердәнбер реаль тамыр, чөнки квадрат өчбуынның дискриминанты тискәре.

Җавап. $x = -\frac{1}{2}$.

Искәрмә. Монда тамырлары t_1 һәм t_2 булган квадрат өчбуынны таркату формуласы файдаланылды. $at^2 + bt + c = a(t - t_1)(t - t_2)$.

2.9. Югары дәрәҗә тигезләмәләрне билгесез коэффициентлар методын кулланып чишү

Башта, безгә таныш булган мисалны чишеп, бу методның асылын күрсәтик: $t^3 - 2t^2 - 3t + 10 = 0$ тигезләмәсен чишегез. Тигезләмәнең сул ягын түбәндәге рәвештә язый́к: $t^3 - 2t^2 - 3t + 10 = (t + d)(at^2 + bt + c)$, монда a, b, c, d — билгесез коэффициентлар. Бу — бердәйлек. Дәрәҗәләре тигез булган коэффициентларны тигезләсәк, дүрт билгесезле дүрт тигезләмә системасы килеп чыга:

$$\begin{cases} a = 1, \\ ad + b = -2, \\ c + bd = -3, \\ cd = 10. \end{cases}$$

Әгәр -2 саны (ирекле буынның бүлүчесе) тигезләмәнең тамыры икәнен искә алсак, безнең системаның чишелеше шактый гадиләшә. Шулай итеп, $d = 2$, $c = 5$, $b = -4$, $a = 1$ һәм без таныш җавапны табабыз.

Мисал. Тигезләмәне чишегез: $x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 11x + 15 = 0$.

Тигезләмәнең сул ягын таркатып язабыз: $x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 11x + 15 = (x^2 + px + q)(x^2 + rx + s)$. Монда p, q, r, s — билгесез коэффициентлар. Үткән мисалдагы кебек фикер йөртсәк, p, q, r, s коэффициентлары кергән система килеп чыга:

$$\begin{cases} p + r = 3, \\ s + q + pr = -6, \\ ps + qr = -11, \\ qs = 15. \end{cases} \qquad (1.9)$$

Бу системаны чишү бирелгән тигезләмәне чишүдән авыррак та булуы мөмкин. Шулай да, әгәр системаның чишелешен бөтен саннар күплегендә эзләсәк, мәсьәлә бераз гадиләшә. Иң соңгы тигезләмәдән q өчен түбәндәге саннар булу мөмкинлеге күренә: ± 1, ± 3, ± 5, ± 15.

Беренче тигезләмәне $-q$ га тапкырлап, өченче тигезләмәгә кушсак, $p(s - q) = -3q - 11$ килеп чыга. $S = \frac{15}{q}$ икәнен исәпкә алып, p ны табу өчен түбәндәге тигезләмәне табабыз:

$$p = q\frac{3q+11}{q^2-15}. \qquad (1.10)$$

(1.9) системасының бөтен тамырларын табу схемасы түбәндәгечә: 1) (1.10) тигезләмәсендә q га мөмкин булган кыйммәтләрне биреп, p ны табабыз;

2) әгәр p бөтен сан булса, беренче тигезләмәдән r санының кыйммәтен табабыз: $r = 3 - p$;

3) s ны исәпләп чыгарабыз: $s = 15 / q$;

4) p, q, r, s өчен исәпләп чыгарган кыйммәтләрнең икенче тигезләмәне канәгатьләндерүен тикшерәбез.

Хисаплау юлы түбәндәге таблицада күрсәтелә:

q	1	–1	3	–3	5	–5	15	–15
p	-1	4/7	–10	1	13	2	4	17/7
s	15		5	–5	3	–3	1	
r	4		13	2	–10	1	–1	
$s+q+pr$	12		–122	–6	–122	–6	12	

Бу таблицадан күренгәнчә, монда барысы ике вариант булуы мөмкин.

Беренче очрак: $p_1 = 1$, $q_1 = -3$, $r_1 = 2$, $s_1 = -5$.

Икенче очрак: $p_2 = 2$, $q_2 = -5$, $r_2 = 1$, $s_2 = -3$.

Ләкин ике вариант та бер үк квадрат тигезләмәләрнең тапкырчыгышына китерә, бу табигый хәл, чөнки тапкырлаучылар q һәм s, шулай ук p һәм r системага үзара симметрияле булып керәләр:

$$\begin{cases} x^2 + x - 3 = 0, \\ x^2 + 2x - 5 = 0. \end{cases}$$

Җавап. $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$;
$x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{6}$.

Күнегүләр

1. $2x^3 + mx^2 - 13x + n = 0$ тигезләмәсенең ике тамыры 2 һәм 3 кә тигез. Өченче тамырын табыгыз.

2. $36x^4 + 12x^3 - 11x^2 - 2x + 1 = 0$.

3. $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x = 0$.

4. $x^3 - x^2 - 8 / \left(x^3 - x^2\right) = 2$.

5. $x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = 0$.

6. $x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 = 0$.

7. $x^4 + x^3 - 2x^2 + 12x - 16 = 0$.

8. Сул ягындагы вакланманы кыскартып, тигезләмәне чишегез: $\frac{x^8+x^4-2x^2+6}{x^4+2x^2+3} = 11x^2 - 34$.

Җаваплар

1. $x_3 = -5/2$.

2. $x_{1,2} = -\frac{1}{2}$; $x_{3,4} = \frac{1}{3}$.

3. $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm 1$; $x_4 = 2$.

4. $x_1 = -1$; $x_2 = 2$.

5. $x_1 = -1$; $x_2 = 3$; $x_3 = 4$.

6. $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$; $x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{29}}{2}$.

7. $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{5}$.

8. $x_{1,2} = \pm 2$; $x_{3,4} = \pm 3$.

2.10. Тигезләмәләрне тулы квадрат аерып чыгару методы белән чишү

Мисаллар. Тигезләмәләрне чишегез:

а) $2x^4 + x^3 + 4x^2 + x + 2 = 0$.

Чишү. Тигезләмәнең сул ягын түбәндәге рәвештә язабыз:

$$2x^4 + x^3 + 4x^2 + x + 2 = \left(2x^4 + 4x^2 + 2\right) + \left(x^3 + x\right) = 2\left(x^2 + 1\right)^2 + $$
$$+x\left(x^2 + 1\right) = \left(x^2 + 1\right)\left(2x^2 + x + 2\right).$$

Бу квадрат өчбуыннарның һәрберсенең дә дискриминанты тискәре.

Җавап. Тамырлар юк.

б) $\left(1 + x^2\right)^2 - 4x\left(1 - x^2\right) = 0$.

Чишү. $\left(1 + x^2\right)^2 = \left(1 - x^2\right)^2 + 4x^2$ булганлыктан, тигезләмәне $\left(1 - x^2\right)^2 - 4x\left(1 - x^2\right) + 4x^2 = 0$ рәвешендә, ягъни $\left(\left(1 - x^2\right) - 2x\right)^2 = 0$ дип алып була.

Җавап. $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$.

в) $(x + 5)^4 + (x + 3)^4 = 2$.

Чишү. $(x + 5)^4 + (x + 3)^4 = 2 \Leftrightarrow \left((x + 5)^2 - (x + 3)^2\right)^2 +$
$+2(x + 5)^2(x + 3)^2 = 2 \Leftrightarrow \left((x + 5 - x - 3)(x + 5 + x + 3)\right)^2 +$

$$+2\left(x^2+8x+15\right)^2=2 \Leftrightarrow 16(x+4)^2+2\left((x+4)^2-1\right)^2=2,$$

$(x+4)^2=t\geq 0$ дип билгелибез.

$16t+2(t-1)^2=2 \Leftrightarrow 2t^2+12t=0 \Leftrightarrow t_1=0;\ t_2=-6$ (тамыр була алмый).

Җавап. $x=-4$.

2.11. Тигезләмәләрне системага күчерү методы белән чишү

Мисаллар. а) $x\,\frac{19-x}{x+1}\left(x+\frac{19-x}{x+1}\right)=84$.

Чишү. $\frac{19-x}{x+1}$ не y ка алыштырабыз, ягъни $19-x=xy+y \Rightarrow$ $\Rightarrow xy+x+y=19$.

Монда түбәндәге система килеп чыга: $\begin{cases} xy+(x+y)=19, \\ xy(x+y)=84. \end{cases}$

$xy=u$, $y+x=v$ дип билгеләсәк, $\begin{cases} u+v=19, \\ u\cdot v=84. \end{cases}$

Моннан $u_1=7;\ v_1=12;\ u_2=12;\ v_2=7$.
x ның кыйммәтен системалардан табабыз:

$$\begin{cases} x+y=7 \\ xy=12, \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=12, \\ xy=7. \end{cases}$$

Җавап. $x_1=3;\ x_2=4;$
$x_{3,4}=6\pm\sqrt{29}$.

б) $(x+5)^4+(x+3)^4=2$.

Чишү. $u=x+5$, $v=x+3$ булсын. Ул вакытта $u-v=2$.
Безнең төп тигезләмә түбәндәге системага эквивалент була:

$$\begin{cases} u^4+v^4=2, \\ u-v=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\left(u^2+v^2\right)^2-2u^2v^2=2,\right. \\ u^2+v^2-2uv=4. \end{cases}$$

Икенче тигезләмәдән: $u^2+v^2=4+2uv=2(2+uv)$.

Шуның өчен беренче тигезләмә түбәндәге рәвешкә килә:

$$4(2+uv)^2-2u^2v^2=2 \Rightarrow (uv)^2+8(uv)+7=0 \Rightarrow (uv)_1=-1;\ (uv)_2=-7.$$

$uv = (x+5)(x+3) = x^2 + 8x + 15$ булганлыктан, түбәндәге ике квадрат тигезләмәне чишәргә туры килә:

$$x^2 + 8x + 15 = -1 \Rightarrow x_{1,2} = -4.$$

$$x^2 + 8x + 15 = -7 \Rightarrow \varnothing.$$

Җавап. $x = -4$.

2.12. Параметрлы тигезләмәләр

Параметрлы тигезләмәләрне чишкәндә, коэффициентлары билгеле булган тигезләмәләрдән аермалы буларак, өстәмә тикшерү зарур.

Мисаллар. а) Тигезләмәне чишегез: $(x-a)^3 - (x-b)^3 = b^3 - a^3$.

$a \neq b$ булсын. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ формуласын кулланып, тигезләмәне түбәндәге рәвештә языйк:

$$((x-a)-(x-b))\left((x-a)^2 + (x-a)(x-b) + (x-b)^2\right) =$$

$$= (b-a)(b^2 + ab + a^2) \Leftrightarrow (x^2 - 2ax + a^2 + x^2 - x(a+b) +$$

$$+ab + x^2 - 2bx + b^2 = b^2 + ab + a^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 3x(a+b) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x-a-b) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = a + b.$$

Әгәр $a = b$ булса, бирелгән аңлатма тигезләмә булмый.

б) $\frac{x+2a}{a-1} + \frac{x-2a}{a+1} = 1, \quad |a| \neq 1;\ a \neq 0.$

Чишү. Тигезләмәнең ике ягын да $a^2 - 1 \neq 0$ гә тапкырлап гадиләштергәч, тамырдаш тигезләмә килеп чыга: $2ax = a^2 - 4a - 1$.

Әгәр $a = 0$ булса, аңлатма тигезләмә булмый, шуның өчен $a \neq 0$.

Җавап. $x = \frac{a^2-4a-1}{2a}$.

Бер параметрлы тигезләмәне x ка карата чишү авыр булса, параметрга карата эшләп карарга мөмкин.

Мисал. Тигезләмәне чишегез:

$$x^3 - 2ax^2 + (a^2 + 2\sqrt{3}a - 9)x - 2a^2\sqrt{3} + 12a - 6\sqrt{3} = 0.$$

МТӨ: x өчен $x \in R$, a өчен $a \in R$.

Бирелгән тигезләмә x өчен — өченче, a өчен икенче дәрәҗә тигезләмә булып тора.

Шуның өчен квадрат тигезләмәне чишәбез:

$$(x - 2\sqrt{3})a^2 + 2(\sqrt{3}x - x^2 + 6)a + x^3 - 9x - 6\sqrt{3} = 0.$$

Бу тигезләмәнең дискриминанты

$$\left(\sqrt{3}x - x^2 + 6\right)^2 - \left(x - 2\sqrt{3}\right)\left(x^3 - 9x - 6\sqrt{3}\right) = 0 .$$

Квадрат тигезләмәнең тамырлары тәңгәл дигән сүз.

$$a = \frac{-\left(\sqrt{3}x - x^2 + 6\right)}{x - 2\sqrt{3}} = \frac{\left(x - 2\sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right)}{x - 2\sqrt{3}} = x + \sqrt{3} .$$

Шулай итеп, баштагы тигезләмә $\left(x - 2\sqrt{3}\right)\left(a - x - \sqrt{3}\right)^2 = 0$ рәвешен ала. Параметрының теләсә нинди кыйммәтләре өчен дә тигезләмәнең ике тамыры бар: $x_1 = 2\sqrt{3}$, $x_2 = a - \sqrt{3}$.

Җавап: $x_1 = 2\sqrt{3}$; $x_2 = a - \sqrt{3}$.

Бер параметрлы тигезләмәләрне чишү өчен, түбәндәге киңәшне тәкъдим итәбез.

Бирелгән тигезләмәне a параметрына карата чишәргә, аннан соң $x0a$ яссылыгында $a = \varphi(x)$ функциясенең графигын төзергә һәм бу графикның $a = const$ турысы белән кисешү ноктасын табарга кирәк.

1) Әгәр кисешү ноктасы бер генә булса, ул вакытта баштагы тигезләмәнең бердәнбер чишелеше була, әгәр ике кисешү ноктасы булса — ике тамыры һәм аннан соң да шулай дәвам итә.

2) Әгәр кисешү ноктасы булмаса, ул вакытта тигезләмәнең дә чишелеше булмый.

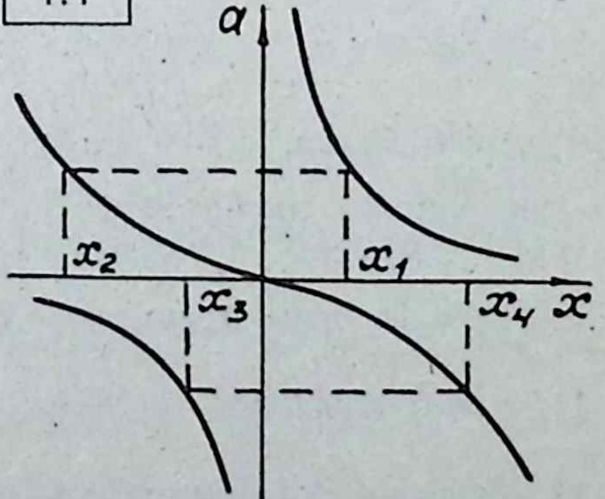
Мисал. $ax^4 - x^3 + a^2x - a = 0$.

Чишү. a параметрына карата квадрат тигезләмә $xa^2 + \left(x^4 - 1\right)a - x^3 = 0$, моннан

$$a_{1,2} = \frac{1 - x^4 \pm \sqrt{\left(1 - x^4\right)^2 + 4x^4}}{2x} = \frac{1 - x^4 \pm \left(1 + x^4\right)}{2x}.$$

$$a_1 = \varphi_1(x) = 1/x ;\ \ a_2 = \varphi_2(x) = -x^3.$$

1.1



Бу функцияләрнең графиклары 1.1 рәсемендә күрсәтелгән.

Графиктан күренгәнчә, $a \in (0, +\infty)$ булганда, тигезләмәнең ике тамыры бар:

$$x_1 = \frac{1}{a};\ \ x_2 = -\sqrt[3]{a} .$$

$a \in (-\infty, 0)$ булганда да ике тамыр: $x_3 = \frac{1}{a}$, $x_4 = -\sqrt[3]{a}$ була. $a = 0$ булганда, бердәнбер тамыр: $x = 0$ була.

Җавап. Әгәр $a \neq 0$ булса, ике тамыр:
$x_1 = \frac{1}{a}$; $x_2 = -\sqrt[3]{a}$.
Әгәр $a = 0$ булса, бер тамыр:
$x = 0$ була.

Күнегүләр

1. $x^2 + \frac{9x^2}{(3+x)^2} = 7.$ **2.** $x^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = 8.$

3. $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x+2}{x+3} = \frac{4}{(1-x)(x+3)}.$ **4.** $x^2 + \frac{81x^2}{(9+x)^2} = 40.$

5. $\left(\frac{x^2+6}{x^2-4}\right)^2 = \left(\frac{5x}{4-x^2}\right)^2.$ **6.** $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = \frac{10}{9}.$

7. $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = \frac{7}{9}\,\frac{x+1}{x-1}.$ **8.** $\frac{(x^2+1)^2}{x(x+1)^2} = \frac{625}{112}.$

9. $\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^2 + \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2 = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2}, \ (ab > 0).$

10. $x^3 - 2x^2 - (a^2 - a - 1)x + a^2 - a = 0.$

11. $ax^4 - x^3 + a^2x - a = 0.$ **12.** $x^3 - 3x = a^3 + \frac{1}{a^3}, \ (a \neq 0).$

13. $\frac{a}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}.$ **14.** $x^4 + 12x^3 + 32x^2 - 8x - 4 = 0.$

Җаваплар

1. $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}.$ 2. $x_{1,2} = 2$; $x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{3}.$

3. Тамырлары юк. 4. $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{19}.$

5. $x_{1,2} = \pm 3.$ 6. $x_{1,2} = \pm 0{,}5.$

7. $x = 2.$ 8. $x_1 = \frac{1}{7}$; $x_2 = 7.$

9. $a \neq b$ булса, $x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(a + b \pm \sqrt{a^2 + 6ab + b}\right)$. $x_{3,4} = \frac{1}{2} \times$ $\times\left(-a - b \pm \sqrt{a^2 + 6ab + b^2}\right)$. $a = b$ булса, тигезләмә булмый.

10. $x_1 = 1$; $x_2 = a$; $x_3 = 1 - a.$

11. $a \neq 0$ булганда, $x_1 = \frac{1}{a}$; $x_2 = -\sqrt[3]{a}$; $a = 0$ булганда, $x = 0.$

12. Әгәр $a = 1$ булса, $x_1 = 2$, $x_{2,3} = -1$; әгәр $a = -1$ булса,

$x_1 = -2$, $x_{2,3} = 1$; әгәр $|a| = 1$ булса, тигезләмәнең бердәнбер тамыры бар: $x = a + \frac{1}{a}$.

13. $x = \frac{4-a}{2+a}$ ($a \neq -2$, $a \neq 1$ булганда); $\varnothing$, ($a = -2$ булганда). Әгәр $a = 1$ булса, тигезләмә бердәйлеккә әйләнә.

14. $x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{14}$; $x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{6}$.

2.13. Билгесезе модуль тамгасы астында булган тигезләмәләр

Билгесезе абсолют зурлык тамгасы астында булган тигезләмә гади тигезләмәләр җыелмасына күчү юлы белән эшләнә, ягъни билгесез модульдән коткарыла.

Реаль x санының абсолют зурлыгы ничек билгеләнгәнен исегезгә төшерик:

$$|x| = \left[\begin{array}{ll} x, & x \geq 0 \text{ булганда,} \\ -x, & x < 0 \text{ булганда.} \end{array}\right.$$

Геометрия күзлегеннән караганда, $|x|$ — ул x ноктасыннан 0 ноктасына кадәр ара ераклыгы, $|x - y|$ исә x һәм y нокталары арасындагы ераклык (бу раслауның дөреслеген үзегез уйлагыз).

Абсолют зурлыкның үзлекләре (аларны исбатлагыз):

1. $|x| \geq 0$.
2. $|x^2| = x^2$.
3. $|-x| = x$.
4. $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$.
5. $$|x| > a^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > a^2, \\ x < -a^2. \end{array}\right.$$
6. $|x + y| \leq |x| + |y|$; $|x - y| \geq |x| - |y|$ (өчпочмак тигезсезлеге).
7. $|xy| = |x||y|$; $\left|\frac{x}{y}\right| = \left|\frac{x}{y}\right|$ $(y \neq 0)$.

$\sqrt{x^2} = |x|$ икәнен истә тоту файдалы.

Нинди дә булса функциянең $f(x)$ абсолют зурлыгы түбәндәге формула белән бирелә:

$$|f(x)| = \left[\begin{array}{ll} f(x), & f(x) \geq 0 \text{ булганда,} \\ -f(x), & f(x) < 0 \text{ булганда.} \end{array}\right.$$

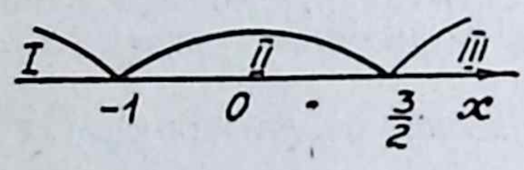
Мисал. Тигезләмәне чишегез: $|x + 1| = |3 - 2x|$.

Беренче юл. Билгеләмә буенча

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, & x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1 \text{ булганда,} \\ -x-1, & x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ булганда.} \end{cases}$$

$$|3-2x| = \begin{cases} 3-2x, & \text{әгәр } 3-2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}, \\ -3-2x, & \text{әгәр } 3-2x < 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}. \end{cases}$$

1.2



Модуль тамгасы астындагы аңлатмаларның нульгә тигез булган нокталарын санлы турыда билгелик.

1.2 рәсемендә күренгәнчә, бу нокталар санлы турыны өчкә бүлә.

1) $x < -1$ булсын. Ул вакытта $|x+1| = -x-1$. Баштагы тигезләмә болай языла: $-x-1 = 3-2x \Rightarrow \Rightarrow x = 4$. Ләкин бу тамыр без караган күплеккә керми, шуның өчен монда тигезләмәнең чишелеше булмый.

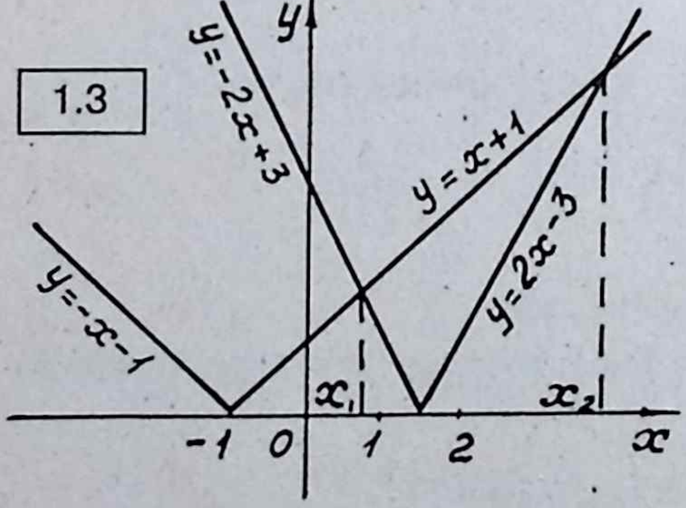
2) $-1 \leq x \leq \frac{3}{2}$ булсын. Монда $|x+1| = x+1$, $|3-2x| = 3-2x$. Баштагы тигезләмә түбәндәге рәвешкә килә: $x+1 = 3-2x \Rightarrow x = \frac{2}{3}$.

3) $x > \frac{3}{2}$ булсын. Ул вакытта $|x+1| = x+1$;

$$|3-2x| = -3+2x \Rightarrow x+1 = -3+2x \Rightarrow x = 4.$$

Җавап. $x_1 = \frac{2}{3}$; $x_2 = 4$.

1.3



Икенче юл (график юл). $y_1 = |x+1|$ һәм $y_2 = |3-2x|$ функцияләренең графиклары 1.3 рәсемендә бирелгән. x_1 тамыры $x_1 + 1 = -2x + 3$, x_2 тамыры $2x - 3 = x + 1$ тигезләмәсеннән табылалар.

Өченче юл. x ның теләсә нинди кыйммәте өчен тигезләмәнең ике ягы да уңай, шуның өчен $|x+1| = |3-2x| \Leftrightarrow (x+1)^2 = (3-2x)^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 14x + 8 = 0$.

Моннан $x_1 = \frac{2}{3}$; $x_2 = 4$.

Күнегүләр

1. $|3x - 4| = \frac{1}{2}$.
2. $||x - 1| + 2| = 1$.
3. $||x + 1| + 2| = 2$.
4. $||3 - 2x| - 1| = 2$.
5. $|2x - x^2 - 3| = 1$.
6. $|x^2 - 3x + 3| = 2$.
7. $|x| - 2|x + 1| + 3|x + 2| = 0$.
8. $|x + 3| + |x - 5| = 8$.
9. $|x^2 - 9| + |x^2 - 4| = 5$.
10. $|x - 1| + |x - 2| = 3$.
11. $x^2 + |x| - 2 = 0$.
12. $x^2 - 2x - 3 = |3x - 3|$.
13. $|2x - 3| = |x^2 - 2x - 6|$.
14. $2|x + 6| - |x| - |x - 6| = 18$.

Җаваплар

1. $x_1 = 1{,}5$; $x_2 = \frac{7}{6}$.
2. Тамырлар юк.
3. $x = -1$.
4. $x_1 = 0$; $x_2 = 3$.
5. Тамырлар юк.
6. $x_{1,2} = \left(3 \pm \sqrt{5}\right) / 2$.
7. $x = -2$.
8. $-3 \le x \le 5$.
9. $-3 \le x \le -2$; $2 \le x \le 3$.
10. $x_1 = 0$; $x_2 = 3$.
11. $x_1 = 1$; $x_2 = -1$.
12. $x_1 = 5$; $x_2 = -3$.
13. $x_1 = -3$; $x_2 = 2 - \sqrt{7}$; $x_3 = 3$; $x_4 = 2 + \sqrt{7}$.
14. $[6, +\infty)$.

3. ИРРАЦИОНАЛЬ ТИГЕЗЛӘМӘЛӘР

Билгесезе бер яки берничә радикал астында булган тигезләмә *иррациональ тигезләмә* дип атала. Башлангыч математикада иррациональ тигезләмәләрнең чишелеше реаль саннар күплегендә табыла, шуның өчен тискәре саннардан җөп дәрәҗәле радикаллар каралмый, так дәрәҗәле радикалларның бердәнбер кыйммәтләре карала, мәсәлән, $\sqrt[3]{-8} = -2$; $\sqrt[5]{32} = 2$.

Тигезләмәгә кергән җөп дәрәҗәдәге радикалларның арифметик мәгънәсе генә бирелә:

$$\sqrt{f(x)} \ge 0 \quad f(x) \ge 0 \quad (\text{мәсәлән, } \sqrt{4} = 2, \ \pm 2 \text{ түгел}).$$

Соңгы тигезсезлек x ның МТӨн билгели. Шундый нәтиҗәне истә тотыйк, әгәр $f(x)=\varphi^2(x)$ булса, $\sqrt{\varphi^2(x)}=|\varphi(x)|$ була.

Тапкырлаучыларны җөп дәрәҗәле тамыр астына кертү гамәлләрен дөрес үтәү кирәк, мәсәлән:

$$g(x)\sqrt{f(x)}=\left[\begin{array}{lll}\sqrt{g^2(x)f(x)}, & g(x)\ge 0 & \text{булганда,}\\ -\sqrt{g^2(x)f(x)}, & g(x)<0 & \text{булганда.}\end{array}\right.$$

Иррациональ тигезләмәләрне чишүнең кайбер методларын карыйк.

3.1. Иррациональ тигезләмәләрне рациональ тигезләмәләргә күчү методы белән чишү

Бу метод тигезләмәнең ике ягын да бер-бер артлы натураль дәрәҗәгә күтәреп, билгесезләрне радикалдан коткарудан гыйбарәт. Тигезләмәнең ике ягын да так дәрәҗәгә күтәргәндә, баштагы тигезләмәгә тамырдаш тигезләмә килеп чыга, ә җөп дәрәҗәгә күтәргәндә, гомуми итеп әйткәндә, баштагы тигезләмә тамырдаш тигезләмәгә күчә. Чыннан да, әгәр $f(x)=\varphi(x)$ тигезләмәсенең ике ягын да икенче дәрәҗәгә күтәрсәк, $(f(x))^2=(\varphi(x))^2$ тигезләмәсе килеп чыга, бу тигезләмәнең тамырлар күплеге ике тигезләмәнең тамырлары күплекләре берләшмәсеннән гыйбарәт: $f(x)=\varphi(x)$, $f(x)=-\varphi(x)$. Әгәр $f(x)=\varphi(x)$ тигезләмәсенең ике ягы да уңай, я тискәре булса һәм бары тик шул вакытта гына $f(x)=\varphi(x)$ һәм $(f(x))^2=(\varphi(x))^2$ тигезләмәләре тамырдаш булалар. Шуның өчен, тигезләмәләрне җөп дәрәҗәгә күтәргәндә, x ның МТӨ табу шартына тигезләмәнең ике ягының да бер үк тамгада булу шартын өстәргә кирәк.

Мисаллар. а) $\sqrt{2x-6}+\sqrt{x+4}=5$.

Чишү. Тигезләмәнең МТӨ түбәндәге системаның чишелешләре күплеге була:

$$\begin{cases}2x-6\ge 0,\\ x+4\ge 0,\end{cases}\quad \text{моннан } x\ge 3.$$

Тигезләмәнең ике ягын да икенче дәрәҗәгә күтәрсәк, эквивалент тигезләмә килеп чыга, чөнки тигезләмәнең ике ягы да уңай:

$$\left(\sqrt{2x-6}\right)^2+2\sqrt{2x-6}\,\sqrt{x+4}+\left(\sqrt{x+4}\right)^2=25\Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2+2x-24}=$$
$$=27-3x,\ \text{биредә } 3\le x\le 9.$$

Бу тигезләмәнең ике ягын да квадратка күтәрсәк, $x^2 - 170x + 825 = 0$ тигезләмәсен табабыз. Моннан $x = 5$ тамыры табыла, $x = 165$ — чит тамыр.

Искәрмә. Әгәр x ның 9 дан ким булуын искә алсак, чит тамырны белү өчен тикшерү кирәк тә түгел, чөнки $x_2 = 165$ нең $[3;\ 9]$ кисемтәсенә кермәве ачык.

Җавап. $x = 5$.

б) $\sqrt{x-5} - \sqrt{2x-1} = 3 + x^2$.

Чишү. МТК: $\begin{cases} x - 5 \geq 0 \\ 2x - 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 5$.

Тигезләмәнең уң ягы x ның барлык кыйммәтләре өчен дә уңай, шуның өчен МТК табу шартына сул якның уңай булу шартын да өстәргә кирәк: $\sqrt{x-5} - \sqrt{2x-1} > 0$ яисә $x - 5 > 2x - 1 \Rightarrow x < -4$.

Шулай итеп, тигезләмәнең чишелеше $\begin{cases} x \geq 5, \\ x < -4 \end{cases}$ системасын канәгатьләндерергә тиеш. Ләкин бу каршылыклы система. Шуның өчен бу тигезләмәнең чишелеше юк.

в) $\sqrt[3]{2x+4} + \sqrt[3]{x-3} = 1$.

Чишү. МТӨ: $-\infty < x < \infty$. Тигезләмәнең ике ягын да өченче дәрәҗәгә күтәреп һәм $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ бердәйлегенә таянып, тамырдаш тигезләмәгә күчәбез: $2x + 4 + x - 3 + 3\sqrt[3]{(2x+4)(x-3)}\left(\sqrt[3]{2x+4} + \sqrt[3]{x-3}\right) = 1$.

Баштагы тигезләмәне файдаланып рәвешүзгәрткәннән соң, түбәндәге тигезләмә килеп чыга: $\sqrt[3]{(2x+4)(x-3)} = -x$.

Тигезләмәнең ике ягын да кубка күтәреп, $x^3 + 2x^2 - 2x - 12 = 0$ тигезләмәсен табабыз. Бу тигезләмә яисә $(x-2)\left(x^2 + 4x + 6\right) = 0$ тигезләмәсе баштагы тигезләмәгә тамырдаш.

Җавап. $x = 2$.

г) $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 1$.

Чишү. Үткән мисалдагы кебек, тигезләмәнең ике ягын да кубка күтәреп, эквивалент тигезләмә табабыз: $2x - 1 + x - 1 + 3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}\left(\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1}\right) = 1$.

Җәя эчендәге аңлатманы, баштагы тигезләмәне файдаланып, бер саны белән алыштырсак, гади рәвешүзгәртүдән соң тигезләмә таба-

быз: $\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)} = 1 - x \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^3 - x^2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 0, \quad x_3 = 1$. Ләкин тикшерү буенча $x_{1,2} = 0$ чит тамыр, гомумән әйткәндә бу тамыр тигезкөчле булмаган рәвешүзгәртүдән килеп чыга.

x ның МТӨн табу һәм тигезләмәнең ике ягының да бер үк тамгалы зурлык булуын билгеләү кайвакытта шактый авыр. Бу очракта x ның табылган кыйммәтләренең чын тамыр булуын тигезләмәгә куеп beləләр. Яки тамгаларның тәңгәл булу шарты һәм МТӨн табу өчен төзелгән тигезсезлекләр системасына куеп беләләр.

Мисал. $\sqrt{4 + x\sqrt{36 + x^2}} = x + 2$.

Чишү. МТӨ (тамгаларның тәңгәл килү шарты) система белән билгеләнә:

$$\begin{cases} 4 + x\sqrt{36 + x^2} \geq 0, \\ x + 2 \geq 0. \end{cases}$$

Тигезләмәнең ике ягын да квадратка күтәреп табабыз: $4 + x\sqrt{36 + x^2} =$ $= (x+2)^2 \Leftrightarrow x\left(x + 4 - \sqrt{36 + x^2}\right) = 0$.

Бу тигезләмә икегә таркала: $x = 0$; $x + 4 - \sqrt{36 + x^2} = 0$.

Соңгы тигезләмәне чишеп, $x = 2{,}5$ не табабыз.

Бу табылган саннарны турыдан-туры баштагы тигезләмә куеп, аларның тамырлар икәненә ышанабыз.

Җавап. $x_1 = 0$; $x_2 = 2{,}5$.

Кайбер очракта, әгәр радикалларны аерып карасак, иррациональ тигезләмәләрне чишү гадиләшә.

Мисал. а) $\sqrt{x^2 + x - 5} + \sqrt{x^2 + 8x - 4} = 5$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. МТӨ система белән билгеләнә:

$$\begin{cases} x^2 + x - 5 \geq 0, \\ x^2 + 8x - 4 \geq 0. \end{cases}$$

Әгәр тигезләмәнең ике ягын да квадратка күтәрсәк, ул вакытта шактый авыр тигезләмә килеп чыга. Тигезләмәнең рәвешен үзгәртәбез: $\sqrt{x^2 + x - 5} = 5 - \sqrt{x^2 + 8x - 4}$ һәм ике ягын да квадратка күтәрәбез: $10\sqrt{x^2 + 8x - 4} = 7x + 26$. Баштагы тигезләмәнең МТӨнә соңгы тигезләмәнең уң ягының уңай булу шартын өстибез:

$7x + 26 \geq 0$. Соңгы тигезләмәне чишеп табабыз: $x_1 = 2$; $x_2 = -\frac{588}{51}$ (x_2 — шартны канәгатьләндерми).

Җавап. $x = 2$.

б) $\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{x+3} = 0$.

Чишү. МТӨ $x \geq -3$. Рәвеш үзгәртәбез $\sqrt[3]{x+7} = \sqrt{x+3}$. Тамырдан котылу өчен тигезләмәнең ике ягын да алтынчы дәрәҗәгә күтәрәбез: $\left(\sqrt[3]{x+7}\right)^6 = \left(\sqrt{x+3}\right)^6 \Leftrightarrow (x+7)^2 = (x+3)^2 \Leftrightarrow x^3 + 8x^2 + 13x - 22 = 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2 + 9x + 22\right) = 0$.

Җавап. $x = 1$.

Күнегүләр

1. $\sqrt{3x+4} + \sqrt{x-4} = 2\sqrt{x}$.

2. $\sqrt{3x+7} - \sqrt{x+1} = 2$.

3. $\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1$.

4. $\sqrt{x^2+9} - \sqrt{x^2-7} = 2$.

5. $\sqrt[3]{25+x} + \sqrt[3]{3-x} = 7$.

6. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{12(x-1)}$.

7. $\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{3x+2} = 0$.

8. $\sqrt{3x^2-2x+15} + \sqrt{3x^2-2x+8} = 7$.

9. $\sqrt{1 + x\sqrt{x^2-24}} = x - 1$.

Җаваплар

1. $x = 4$.
2. $x_1 = -1$; $x_2 = 3$.
3. $x_1 = -61$; $x_2 = 30$.
4. $x_1 = -4$; $x_2 = 4$.
5. $x_1 = -24$; $x_2 = 2$.
6. $x_1 = 1$; $x_{2,3} = 3$.
7. $x = 2$.
8. $x_1 = -1/3$; $x_2 = 1$.
9. $x = 7$.

3.2. Иррациональ тигезләмәләрне яңа билгесез кертү методы белән чишү

Кайбер очракларда яңа билгесез кертеп рәвешүзгәрткәннән соң, тигезләмә гадиләшә, хәтта рациональ тигезләмәгә дә әверелергә мөмкин.

Мисал. а) $x^2 + 3x - 18 + 4\sqrt{x^2 + 3x - 6} = 0$.

Чишү. Бу тигезләмәдә $x^2 + 3x$ аңлатмасы бар, аны яңа билгесез белән алыштырабыз, ягъни $x^2 + 3x = t$ дип алабыз. Ул вакытта тигезләмә түбәндәге рәвешкә килә: $t - 18 + 4\sqrt{t - 6} = 0$.

Әгәр яңа билгесез урынына $x^2 + 3x - 6$ ны алсак, мәсьәлә тагы да гадиләшә.

Тигезләмәне түбәндәге рәвешкә китерәбез:

$$x^2 + 3x - 6 - 12 + 4\sqrt{x^2 + 3x - 6} = 0.$$

$\sqrt{x^2 + 3x - 6} = z$ дип алабыз, монда $z \geq 0$. Квадрат тигезләмәнең $\left(z^2 + 4z - 12 = 0\right)$ ике тамыры бар: $z_1 = -6$ (бу тамыр була алмый); $z_2 = 2$. Шулай итеп, баштагы тигезләмә түбәндәге тигезләмәгә тамырдаш: $\sqrt{x^2 + 3x - 6} = 2$.

Җавап. $x_1 = -5$; $x_2 = 2$.

б) $\sqrt{x^2 + 32} - 2\sqrt[4]{x^2 + 32} = 3$.

Чишү. $\sqrt[4]{x^2 + 32} = z$, монда $z \geq 0$. Бирелгән тигезләмә билгесезе z булган тигезләмәгә әверелә: $z^2 - 2z - 3 = 0$. Моннан $z_1 = -1$ (МТӨнә керми); $z_2 = 3$. x ны табу өчен тигезләмә: $\sqrt[4]{x^2 + 32} = 3$.

Җавап. $x_{1,2} = \pm 7$.

в) $\sqrt[3]{9 - \sqrt{x + 1}} + \sqrt[3]{7 + \sqrt{x + 1}} = 4$.

Чишү. $\sqrt{x + 1} = z$, биредә $z \geq 0$. $\sqrt[3]{9 - z} + \sqrt[3]{7 + z} = 4$ рәвешле тигезләмә килеп чыга, моннан $z = 1$. Шулай итеп, баштагы тигезләмә $\sqrt{x + 1} = 1$ тигезләмәсенә тамырдаш.

Җавап. $x = 0$.

г) $\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} - \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} = 2$.

Чишү. МТӨ: $\begin{cases} x + 2\sqrt{x - 1} \geq 0, \\ x - 2\sqrt{x - 1} \geq 0, \Rightarrow x \geq 1, \\ x \geq 1. \end{cases}$

$\sqrt{x-1} = t$ дип алыштырабыз, монда $t \geq 0$. Ул вакытта $x = t^2 + 1$, һәм безнең тигезләмә түбәндәге рәвешкә керә:

$$\sqrt{t^2+1+2t} - \sqrt{t^2+1-2t} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(t+1)^2} - \sqrt{(t-1)^2} = 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |t+1| - |t-1| = 2 \Leftrightarrow (t+1) - |t-1| = 2.$$

Соңгы тигезләмәне чишеп табабыз: $t \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \geq 1 \Rightarrow x \geq 2$.

Җавап. $x \geq 2$.

д) $\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}} + \sqrt{x+1-\sqrt{x+7}} = 4$.

Чишү. МТӨ: $\begin{cases} x+8+2\sqrt{x+7} \geq 0, \\ x+1-\sqrt{x+7} \geq 0. \end{cases}$ $\sqrt{x+7} = t$ дип алабыз

$(t \geq 0)$, ул вакытта $x = t^2 - 7$, һәм баштагы тигезләмә түбәндәге рәвешкә күчә: $\sqrt{t^2+1+2t} + \sqrt{t^2-6-t} = 4$.

t өчен МТӨ система белән ачыклана: $\begin{cases} t^2+2t+1 \geq 0, \\ t^2-t-6 \geq 0, \Rightarrow t \geq 3, \\ t \geq 0. \end{cases}$

$\sqrt{t^2+2t+1} = t+1$ булганлыктан, соңгы тигезләмәдән $\sqrt{t^2-6-t} = 3-t \Rightarrow t = 3$ һәм $x = t^2 - 7$ дән $x = 2$ не табабыз.

Җавап. $x = 2$.

Үзара кире булган билгесезле аңлатмалар кергән тигезләмәләр шулай ук яңа билгесезгә күчеп эшләнәләр.

Мисал. $\sqrt[5]{\frac{16x}{x-1}} + \sqrt[5]{\frac{x-1}{16x}} = \frac{5}{2}$.

Чишү. МТӨ: $x \neq 0; 1$. $\sqrt[5]{\frac{16x}{x-1}}$ ны t га алыштырып, квадрат тигезләмә табабыз: $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$ яки $2t^2 - 5t + 2 = 0$.

Моннан $t_1 = 2$, $t_2 = 0{,}5$. x ны табу өчен ике тигезләмә табабыз: $\sqrt[5]{\frac{16x}{x-1}} = 2$ һәм $\sqrt[5]{\frac{16x}{x-1}} = \frac{1}{2}$.

Беренче тигезләмәдән $x = 2$, ә икенче тигезләмәдән $x = -\frac{1}{511}$ килеп чыга.

Җавап. $x_1 = -\frac{1}{511}$, $x_2 = 2$.

Искәрмә. Ике ягын да дәрәҗәгә күтәргәнче, я булмаса яңа билгесез керткәнче үк бирелгән тигезләмәне гадиләштерү мөмкинлеген карарга кирәк.

Мисал. $\sqrt{2x^2 + 8x + 6} + \sqrt{x^2 - 1} = 2x + 2$.

Чишү. $2x^2 + 8x + 6 = 2(x+1)(x+3)$ икәнен искә алып, бирелгән тигезләмәнең рәвешен үзгәртәбез:

$$\sqrt{2(x+1)(x+3)} + \sqrt{(x+1)(x-1)} = 2(x+1).$$

Монда $x = -1$ нең тамыр булуы ачык. $x \neq -1$ булган очракта ике якның да тамгалары тәңгәл килү шарты һәм МТӨ $x \geq 1$ тигезсезлеге белән бирелә. Бу шарт өчен баштагы тигезләмәнең ике ягын да $\sqrt{x+1}$ гә бүлеп, $\sqrt{2(x+3)} + \sqrt{x-1} = 2\sqrt{x+1}$ не һәм ике тапкыр дәрәҗәгә күтәреп, тигезләмәнең икенче тамырын: $x = 1$ не табарга мөмкин.

Җавап. $x_{1,2} = \pm 1$.

Иррациональ тигезләмәләрне чишү өчен кайбер очракларда яңа билгесез кертү һәм дәрәҗәгә күтәрү методларын бергә кулланалар.

Мисал. $x + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{35}{12}$.

Чишү. МТӨ һәм тигезләмәнең ике ягы да уңай булу шарты $x > 1$ тигезсезлеге белән бирелә. Тигезләмәнең ике ягын да квадратка күтәреп, яңа тамырдаш тигезләмә табабыз:

$$x^2 + \frac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{1225}{144}.$$

$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ ны z аша билгелибез. Ул вакытта $x^2 + \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{x^4}{x^2-1} = z^2$. $z^2 + 2z - \frac{1225}{144} = 0$ чишүдән $z^2 = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{25}{12}$, чөнки $z = -\frac{49}{12}$ — шартны канәгатьләндерми. $x^4 - \frac{625}{144}x^2 + \frac{625}{144} = 0 \Rightarrow \left(x^2\right)_{1,2} = \frac{625}{2 \cdot 144} \pm$ $\pm\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{625}{144}\right)^2 - \frac{625}{144}} = \frac{625}{144}\left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{19}{4 \cdot 625}}\right)$; $\left(x^2\right)_1 = \frac{25}{9}$; $\left(x^2\right)_2 = \frac{25}{16}$, моннан $x_{1,3} = \pm\frac{5}{3}$; $x_{2,4} = \pm\frac{5}{4}$. Бу тигезләмәнең тискәре тамырлары алынмыйлар.

Җавап. $x_1 = \frac{5}{3}$; $x_2 = \frac{5}{4}$.

Күнегүләр

1. $x^2\sqrt{x^2+20}=22$.

2. $\sqrt{x^3+8}+\sqrt[4]{x^3+8}=6$.

3. $3x^2+2\sqrt{x^2+5x+1}=2-15x$.

4. $x^2-4x-6=\sqrt{2x^2-8x+12}$.

5. $\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x+9}$.

6. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$.

7. $\sqrt[5]{(5x+2)^3}-\dfrac{16}{\sqrt[5]{(5x+2)^3}}=6$.

8. $\sqrt[7]{\dfrac{5-x}{x+3}}+\sqrt{\dfrac{x+3}{5-x}}=2$.

9. $\sqrt{\dfrac{18-7x-x^2}{8-6x+x^2}}+\sqrt{\dfrac{8-6x+x^2}{18-7x-x^2}}=\dfrac{13}{6}$.

10. $\sqrt{\dfrac{2x+1}{x-1}}+\sqrt{\dfrac{x-1}{2x+1}}=1$.

11. $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+10-6\sqrt{x+1}}=1$.

12. $\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}+\dfrac{8(x+1)}{\sqrt{x(x+1)}}=2$.

13. $\sqrt{\dfrac{x-5}{x+2}}+\sqrt{\dfrac{x-4}{x+3}}=\dfrac{7}{x+2}\sqrt{\dfrac{x+2}{x+3}}$.

14. $\dfrac{\sqrt[7]{12+x}}{x}+\dfrac{\sqrt[7]{12+x}}{12}=\dfrac{64}{3}\sqrt[7]{x}$.

15. $\dfrac{\sqrt[7]{x-\sqrt{2}}}{2}-\dfrac{\sqrt[7]{x-\sqrt{2}}}{x^2}=\dfrac{x}{2}\sqrt[7]{\dfrac{x^3}{x+\sqrt{2}}}$.

16. $\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-3x+2}=\sqrt{x^2-x}$.

17. $\sqrt{9x^2-12x+11}+\sqrt{5x^2-8x+10}=2x-1$.

1. $x_1 = -4$; $x_2 = 4$.
2. $x = 2$.
3. $x_1 = -5$; $x_2 = 0$.
4. $x_1 = -2$; $x_2 = 6$.
5. $x_1 = -1$; $x_2 = 0$.
6. $5 \le x \le 10$.
7. $x_1 = 6$; $x_2 = -\frac{2}{3}\left(\sqrt[3]{4} + 1\right)$.
8. $x = 1$.
9. $x_1 = 0$; $x_2 = -5$.
10. Чишелеше юк.
11. $3 \le x \le 8$.
12. $x = -\frac{16}{15}$.
13. $x = 6$.
14. $x_1 = -\frac{12}{129}$; $x_2 = \frac{12}{127}$.
15. $x_1 = -1$; $x_2 = 1$.
16. $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{5+2\sqrt{7}}{3}$.
17. Чишелеше юк.

3.3 Иррациональ тигезләмәләрне берничә билгесез кертеп чишү

Иррациональ тигезләмәне бу метод белән тамырдаш рациональ тигезләмәләр системасына әйләндереп калдырырга мөмкин, ләкин еш кына килеп чыккан система шактый катлаулы була.

Мисаллар. а) $\sqrt[3]{2 - x} = 1 - \sqrt{x - 1}$.

Чишү. $\sqrt[3]{2 - x} = y$; $\sqrt{x - 1} = z$ дип билгелибез. Монда $-\infty < y < \infty$, $z \ge 0$, $x \ge 1$.

Тамырдаш рациональ тигезләмәләр системасын табабыз:

$$\begin{cases} 2 - x = y^3, \\ x - 1 = z^2, \\ y - 1 = -z. \end{cases}$$

Беренче ике тигезләмәне кушкач, $y^3 + z^2 = 1$ килеп чыга, өченче тигезләмәдән файдаланып, $z = 1 - y$ дип алыштырсак, түбәндәге $y^3 + (1 - y)^2 = 1$ яки $1 - y^3 = (1 - y)^2$ тигезләмәсе табылыр. Бу тигезләмәне чишеп, өч тамыр табабыз: $y_1 = 1$; $y_2 = 0$; $y_3 = -2$.

Алар барысы да МТӨнә керәләр. Хәзер $2 - x = y^3$ тигезләмәсеннән баштагы тигезләмәнең тамырларын табабыз.

Җавап. $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 10$.

б) $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1.$

Чишү. МТӨ: $\begin{cases}3x^2+5x+8\ge 0,\\ 3x^2+5x+1\ge 0.\end{cases}$

$\sqrt{3x^2+5x+8}=u$, $\sqrt{3x^2+5x+1}=v$ дип билгелибез. Монда $u\ge 0$, $v\ge 0$, моңардан $\begin{cases}u-v=1,\\ u^2-v^2=7\end{cases}\Rightarrow u=4,$ ягъни $\sqrt{3x^2+5x+8}=4$.

Җавап. $x_1=-\frac{8}{3}$, $x_2=1$.

в) $\sqrt{x^2-9x+14}-\sqrt{x^2-5x-50}=2$.

Чишү. МТӨ түбәндәге системадан чыгып билгеләнә:

$$\begin{cases}x^2-9x+14\ge 0,\\ x^2-5x-50\ge 0.\end{cases}$$

$\sqrt{x^2-9x+14}=u$, $\sqrt{x^2-5x-50}=v$ дип билгелибез. Монда $u\ge 0$, $v\ge 0$. Система төзибез: $\begin{cases}u-v=2,\\ u^2-v^2=64-4x.\end{cases}$

Икенче тигезләмәне беренче тигезләмәгә бүлеп табабыз: $u+v=32-2x$, бу тигезләмәгә $u-v=2$ кушып, $u=17-x$ рәвешле тигезләмәгә күчәбез: $\sqrt{x^2-9x+14}=17-x$.

Соңгы тигезләмәне чишеп, $x=11$ икәнен табабыз, чөнки $17-x\ge 0$.

Җавап. $x=11$.

г) $\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x$.

Чишү. МТӨ: $x\ge 0$.

$\sqrt{2x^2+3x+5}=u$, $\sqrt{2x^2-3x+5}=v$ дип билгелибез, биредә $u\ge 0$, $v\ne 0$. $\begin{cases}u^2-v^2=6x,\\ u+v=3x.\end{cases}$

Беренче тигезләмәне икенчесенә бүлеп табабыз: $u-v=2$. Соңгы тигезләмә белән системаның икенче тигезләмәсен кушабыз:

$2u = 3x + 2$ яки $2\sqrt{2x^2 + 3x + 5} = 3x + 2$. Ике ягының да кыйммәтләре уңай булу шартын исәпкә алып, ике ягын да квадратка күтәрәбез, тигезләмәне чишкәннән соң табабыз: $x_1 = -4$ (МТӨнә керми, тамыр түгел) $x_2 = 4$.

Җавап. $x = 4$.

д) $\sqrt[4]{x + 41} + \sqrt[4]{41 - x} = 4$.

Чишү. МТӨ: $-41 \le x \le 41$.

$\sqrt[4]{x + 41} = u$, $\sqrt[4]{41 - x} = v$ дип билгелибез, монда $u \ge 0$, $v \ge 0$.

Системага күчәбез: $\begin{cases} x + 41 = u^4, \\ 41 - x = v^4, \\ u + v = 4, \end{cases}$ яки $\begin{matrix} u^4 + v^4 = 82, \\ u + v = 4. \end{matrix}$

Системадагы беренче тигезләмәнең рәвешен түбәндәгечә үзгәртәбез:
$u^4 + v^4 = \left(u^2 + v^2\right)^2 - 2u^2v^2 = \left((u+v)^2 - 2uv\right)^2 - 2u^2v^2 = \left(4^2 - 2uv\right)^2 - 2u^2v^2 = 82$ яки $(uv)^2 - 32uv + 87$, моннан $uv = 16 \pm 13$. Ике система килеп чыга:

$$\begin{cases} u + v = 4, \\ uv = 29 \end{cases} \quad \text{һәм} \quad \begin{cases} u + v = 4, \\ uv = 3. \end{cases}$$

Беренче системаның чишелеше юк, ә икенче системадан $u_1 = 3$, $u_2 = 1$ килеп чыга.

Җавап. $x_1 = 40$; $x_2 = -40$.

е) $\sqrt[5]{x^2 - 34x + 64} - \sqrt[5]{x^2 - 34x + 33} = 1$.

Чишү. $\sqrt[5]{x^2 - 34x + 64} = u$, $\sqrt[5]{x^2 - 34x + 33} = v$ дип билгелибез, монда $-\infty < u < \infty$, $-\infty < v < \infty$, $-\infty < x < \infty$.

Тамырдаш системага күчәбез:

$$\begin{cases} x^2 - 34x + 64 = u^5, \\ x^2 - 34x + 33 = v^5, \\ u - v = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^5 - v^5 = 31, \\ u - v = 1, \end{cases} \Leftrightarrow u^5 - (u-1)^5 = 31 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u^5 - (u-1)^3(u-1)^2 = 31 \Leftrightarrow u^4 - 2u^3 + 2u^2 - u - 6 = 0.$$

Бу тигезләмә бары тик ике реаль тамырга ия: $u_1 = -1$, $u_2 = 2$. Баштагы тигезләмәнең тамырларын табу өчен ике иррациональ тигезләмә җыелмасын табабыз: $\sqrt[5]{x^2 - 34x + 64} = -1$, $\sqrt[5]{x^2 - 34x + 64} = 2$.

Моннан $x_{1,2} = 17 \pm \sqrt{224}$, $x_{3,4} = 17 \pm \sqrt{257}$.

3.4. Иярешле аңлатмалар куллану

Мисаллар. а) $\dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}} = \sqrt{x^2 - 1}$.

Чишү. МТӨ: $\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 1$.

Тигезләмәнең сул ягындагы вакланманың ваклаучысын һәм санаучысын вакланманың иярешле аңлатмасына тапкырлап, ваклаучыдагы радикаллардан котылабыз.

$$\frac{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}+2\right)\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right)}{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right)} = \sqrt{x^2 - 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)-(x+1)+2\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right)}{(x-1)-(x+1)} = \sqrt{x^2 - 1} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \sqrt{x^2 - 1} - 1.$$

Ике ягын да квадратка күтәреп табабыз: $x + 1 - 2\sqrt{x^2 - 1} + x - 1 =$ $= x^2 - 1 - 2\sqrt{x^2 - 1} + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2$. $x_1 = 0$ — чит тамыр. Ул эквивалент булмаган рәвешүзгәртүдән — дәрәҗәгә күтәрүдән килеп чыга.

Җавап. $x = 2$.

б) $\dfrac{(x-1)^2}{\left(3+\sqrt{8+x}\right)^2} = x - 7$.

Чишү. МТӨ һәм тигезләмәнең ике ягының да уңай булулары шарты түбәндәге тигезсезлекләр системасы белән билгеләнә:

$$\begin{cases} x + 8 \geq 0, \\ x - 7 \geq 0, \end{cases} \Rightarrow x \geq 7.$$

Баштагы тигезләмә $x \geq 7$ булганда, $\dfrac{x-1}{3+\sqrt{8+x}} = \sqrt{x - 7}$ тигезләмәсенә эквивалент. (Ни өчен?)

$$\frac{1}{3+\sqrt{x+8}} = \frac{3-\sqrt{x+8}}{\left(3+\sqrt{x+8}\right)\left(3-\sqrt{x+8}\right)} = \frac{3-\sqrt{x+8}}{9-(x+8)} = \frac{3-\sqrt{x+8}}{1-x} \Leftrightarrow \text{ булган-}$$

лыктан, тигезләмә түбәндәге тигезләмәгә эквивалент: $\sqrt{8+x}-3=$ $=\sqrt{x-7} \Leftrightarrow 8+x-6\sqrt{x+8}+9=x-7 \Leftrightarrow \sqrt{8+x}=4 \Leftrightarrow x=8.$

Җавап. $x = 8$.

Күнегүләр

1. $\sqrt{x+2} = \sqrt[3]{3x+2} + 2$.
2. $\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{x-9} = 4$.
3. $\sqrt[4]{97-x} + \sqrt[4]{x} = 5$.
4. $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$.
5. $\sqrt[4]{629-x} + \sqrt[4]{77+x} = 8$.
6. $\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}+1} = \sqrt{1-x^2}$.
7. $\frac{x-1}{1+\sqrt{x}} = 4 - \frac{1-\sqrt{x}}{2}$.
8. $\frac{x}{\sqrt{4-x}+2} + \frac{x}{\sqrt{4+x}-2} = 2$.

Җаваплар

1. $x_1 = -1;\ x_{2,3} = 26 \pm 8\sqrt{12}$.
2. $x_1 = 1;\ x_{2,3} = \frac{63 \pm 11\sqrt{17}}{2}$.
3. $x_1 = 16;\ x_2 = 81$.
4. $x = 3$.
5. $x_1 = 4;\ x_2 = 548$.
6. $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{3/4}$.
7. $x = 81$.
8. $x = -2\sqrt{3}$.

3.5. $\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{\varphi(x)} = \sqrt[3]{g(x)}$ (1.11)
рәвешендәге тигезләмәләрне тикшерү

Бу тигезләмә түбәндәге тигезләмәгә эквивалентлы:

$$f(x) + \varphi(x) + 3\sqrt[3]{f(x)\varphi(x)}\left(\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{\varphi(x)}\right) = g(x). \qquad (1.12)$$

Җәя эчендәге аңлатманы $\sqrt[3]{g(x)}$ ка алыштырабыз, ул вакытта:

$$f(x) + \varphi(x) + 3\sqrt[3]{f(x)\varphi(x)g(x)} = g(x). \qquad (1.13).$$

Шуны әйтергә кирәк, (1.12) тигезләмәсеннән (1.13) тигезләмәсе килеп чыга, ләкин, гомуми очракта, киресенчә килеп чыкмый. Бу тигезләмәләрнең эквивалентлык шартын түбәндәге теорема бирә.

Беренче теорема. *Әгәр* x_0 *(1.13) тигезләмәсенең тамыры һәм* $f(x_0) \neq \varphi(x_0)$ *булса, (1.12) һәм (1.13) тигезләмәләре эквивалент, әгәр* $f(x_0) = \varphi(x_0)$ *булса, чит тамырларның килеп чыгуы мөмкин.*

Исбатлау. $\sqrt[3]{f(x)} = u$, $\sqrt[3]{\varphi(x)} = v$, $\sqrt[3]{g(x)} = w$ дип билгеләп, (1.11) һәм (1.13) аермасын түбәндәге рәвештә язабыз:

$$u + v - w = 0;$$

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = w^3; \tag{1.14}$$

$$u^3 + v^3 + 3uvw - w^3 = 0. \tag{1.15}$$

Турыдан-туры тикшерү ярдәмендә түбәндәге бердәйлекнең хаклыгына ышанырга була: $u^3 + v^3 + 3uvw - w^3 = (u + v - w)(u^2 + v^2 + w^2 - uv + uw + vw)$. Икенче төрле итеп язсак:

$$u^3 + v^3 + 3uvw - w^3 = (u + v - w)\left((u - v)^2 + (v + w)^2 + (u + w)^2\right). \tag{1.16}$$

(1.16) нигезендә (1.15) тигезләмәсе ике тигезләмә җыелмасына эквивалент:

$$\left[\begin{array}{ll} u + v - w = 0, & (1.17) \\ (u - v)^2 + (v + w)^2 + (u + w)^2 = 0. & (1.18) \end{array}\right.$$

Әгәр $u \neq v$ булса, $(u - v)^2 > 0$ һәм (1.18) тигезләмәсенең тамырлары юк, чөнки $(u + v)^2 \geq 0$, $(u + w)^2 \geq 0$, (1.17) тигезләмәсе генә кала. Шулай итеп, (1.14) һәм (1.15), ягъни (1.11) һәм (1.13) тигезләмәләренең тамырдашлыгы исбатлана.

Әгәр $u = v$ булса, (1.18) тигезләмәсе тамырларының (1.11) тигезләмәсе өчен чит тамыр булулары мөмкин. Шулай итеп, теорема исбатланды.

Мисал. $\sqrt[3]{2x - 1} + \sqrt[3]{x} = -1.$

Чишү. $\sqrt[3]{2x - 1} + \sqrt[3]{x} = -1 \Leftrightarrow 3x - 3\sqrt[3]{x(2x - 1)} = 0 \Leftrightarrow x^3 - x(2x - 1) = 0 \Leftrightarrow x(x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_{2,3} = 1.$ $x = 1$ нең баштагы тигезләмәгә чит тамыр булуын тикшереп ачыклыйбыз. Бу чынлап та шулай, чөнки $f(1) = \sqrt{2 \cdot 1 - 1} = 1$, $\varphi(1) = 1$, ягъни беренче теореманың эквивалентлылык шарты үтәлми.

Без карый торган иррациональ тигезләмәнең чит тамыры барлыгына тулы җавапны түбәндәге теорема бирә.

Икенче теорема*. (1.13) тигезләмәсенең тамыры x_0 (1.11) тигезләмәсенә чит булуы өчен кирәкле һәм җитәрлек шарт түбәндәгечә бирелә:

$$\begin{cases} f(x_0) = \varphi(x_0) = -g(x_0), \\ g(x_0) \neq 0. \end{cases}$$

4. КҮРСӘТКЕЧЛЕ ҺӘМ ЛОГАРИФМИК ТИГЕЗЛӘМӘЛӘР

4.1. Күрсәткечле һәм логарифмик функция

Күрсәткечле функциянең ($y = a^x$, монда $-\infty < x < \infty$, $a > 0$, $a \neq 1$) түбәндәге үзлекләре бар:

1. a^x — монотон (бер юнәлештә үзгәрә торган) функция: $0 < a < 1$ булганда кимүче яки $a > 1$ булганда үсүче функция.

2. a^x санлы турының һәр ноктасында өзлексез.

3. $x \to \infty$ булганда, $0 < a < 1$ аралыгында $a^x \to 0$; $a > 1$ аралыгында $a^x \to \infty$.

4. $x \to -\infty$ булганда, $0 < a < 1$ аралыгында $a^x \to \infty$; $a > 1$ аралыгында $a^x \to 0$.

5. a^x функциясенең билгеләнгән кыйммәтләр өлкәсе булып, барлык уңай саннар күплеге R_+ хезмәт итә.

6. Теләсә нинди $x_1, x_2 \in R$ һәм $a, b \in R_+$ өчен түбәндәге аңлатмалар урынлы: $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$, $a^{x_1}/a^{x_2} = a^{x_1-x_2}$; $\left(a^{x_1}\right)^{x_2} = a^{x_1x_2}$; $a^x b^x = (ab)^x$, $a^x/b^x = \left(\frac{a}{b}\right)^x$; $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.

Логарифмик функция ($y = log_a x$, монда $x \in R_+$, $a > 0$, $a \neq 1$) күрсәткечле функциянең кире функциясе булып тора: $y = log_a x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a^y = x$ яки $a^{log_a x} = x$, болардан $log_a 1 = 0$, $log_a a = 1$ икәне килеп чыга.

Аерым алганда, теләсә нинди $a > 0$ өчен $a = 10^{lg a}$ (10 нигезе буенча логарифм lg дип тамгалаганны искә төшерик).

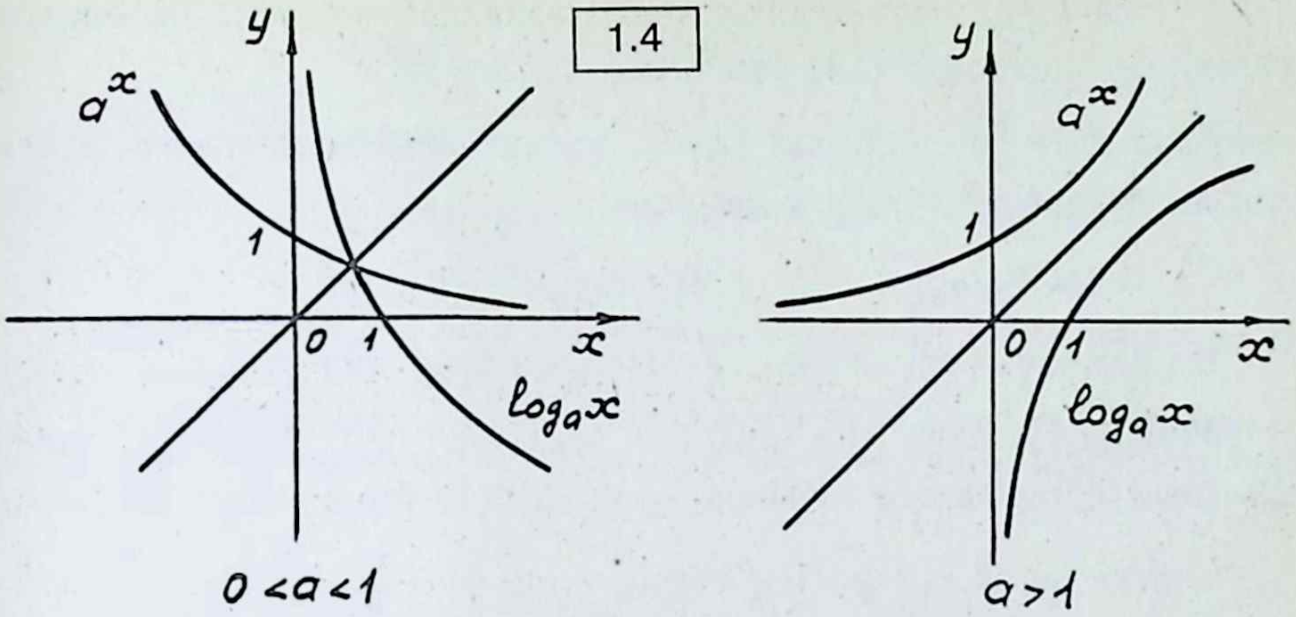
Логарифмик функция түбәндәге үзлекләргә ия:

1. $log_a x$ — монотон функция: $a > 1$ булганда үсүче, $0 < a < 1$ булганда кимүче функция.

---

* Бу Н. Н. Лещенко и Н. В. Травин теоремасы "Обучение математике" 1976, № 1, "София" журналында бирелгән.

1.4



2. $x \in R_+$ өлкәсендә $log_a x$ — өзлексез функция.

3. $x \to \infty$ булганда, $0 < a < 1$ аралыгында $log_a x \to -\infty$, $a > 1$ аралыгында $log_a x \to +\infty$.

4. $x \to 0$ булганда, $0 < a < 1$ аралыгында $log_a x \to +\infty$, $a > 1$ аралыгында $log_a x \to -\infty$.

5. Логарифмик функциянең кыйммәтләре өлкәсе булып барлык чын саннар күплеге хезмәт итә: $(-\infty; +\infty)$.

6. Теләсә нинди $x_1, x_2 \in R_+$ һәм $a > 0$, $a \neq 1$ өчен түбәндәге аңлатмалар урынлы (аларны исбатлагыз): $log_a x_1 + log_a x_2 = log_a x_1 x_2$; $log_a x_1 - log_a x_2 = log_a \frac{x_1}{x_2}$; $log_a x^\alpha = \alpha log_a x \, (\alpha \in R)$; $log_a x = log_b x / log_b a$, $(b > 0,\ b \neq 1)$. $log_a \alpha x = \frac{1}{\alpha} log_a x$; $log_a x = 1/log_x a (x \neq 1)$; $x_1^{log_a x_2} = x_2^{log_a x_1}$.

Искәрмә. $x_1 < 0$, $x_2 < 0$ өчен тапкырчыгышның, вакланманың, җөп санлы дәрәҗәнең логарифмнары өчен түбәндәге аңлатмалар урынлы (чөнки бу очракта $x_1 \cdot x_2 > 0$, $x_1 / x_2 > 0$, $x_1^\alpha > 0$ $(\alpha = 2n, n \in N)$: $log_a(x_1 x_2) = log_a(-x_1)(-x_2) = log_a(-x_1) + log_a(-x_2)$; $log_a \frac{x_1}{x_2} = log_a(-x_1) - log_a(-x_2)$; $log_a x_1^\alpha = \alpha log_a(-x_1)$.

Әгәр α һәм β җөп саннар булса, теләсә нинди a һәм b өчен (монда $ab \neq 0$) түбәндәге аңлатма урынлы:

$$log_{a^\alpha} b^\beta = \frac{\beta}{\alpha} log_{|a|}|b|.$$

a^x һәм $log_a x$ функцияләренең графиклары югарыда китерелгән үзлекләре нигезендә (1.4) рәсемендә күрсәтелә.

Әгәр $A = \frac{b^3 c}{d^2}$ уңай сан булса, логарифмның үзлекләрен файдаланып, түбәндәгечә язарга мөмкин:

$$log_a A = 3log_a|b| + log_a|c| - 2log_a|d|.$$

Бу рәвешүзгәртү A ның логарифмын табу дип атала.

Мисал. Нигезне 3 кә тигез дип алып, $A = \frac{41a^3b}{\sqrt[4]{3}}$ $(ab > 0)$ аңлатмасының логарифмын табыгыз.

Чишү. $log_3 A = log_3 41 + 3log_3|a| + log_3|b| - \frac{1}{4}.$

Логарифм табуга кире булган рәвешүзгәртү, ягъни бирелгән логарифм буенча санның үзен табу потенцирлау дип атала.

Мисал. Әгәр $log_2 A = log_2 7 - log_2 5 - \frac{1}{3} log_2 11$ булса, A ны табарга.

Чишү. $log_2 A = log_2 \frac{7}{5 \cdot 11^{1/3}} = log_2 \frac{7}{5\sqrt[3]{11}}$, моннан $A = \frac{7}{5\sqrt[3]{11}}$.

4.2. $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$ $(a > 0, \neq 1)$ рәвешендәге тигезләмә

Бу тигезләмәне иң гади тигезләмә дип алыйк. Күрсәткечле функциянең үзлеге буенча ул $f(x) = \varphi(x)$ тигезләмәсенә тамырдаш. Аерым очракта, иң гади тигезләмәнең түбәндәге рәвештә булуы мөмкин:

$$a^{f(x)} = c.$$

Ә бу тигезләмә, логарифмның билгеләмәсе нигезендә, түбәндәге тигезләмәгә эквивалент: $f(x) = log_a c$ $(c > 0)$.

Мисаллар. а) $2^{x^2-2x} = 2^{3x-6}$.

Чишү. Бу тигезләмә $x^2 - 2x = 3x - 6$ яки $x^2 - 5x + 6 = 0$ тигезләмәсенә тамырдаш. Моннан $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Җавап. $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

б) $2^{2+4+6+\cdots+2x} = (0{,}25)^{-15}$.

Чишү. Бирелгән тигезләмә $2 + 4 + 6 + \cdots + 2x = log_2(0{,}25)^{-15}$ тигезләмәсенә тамырдаш. Бу тигезләмәнең сул ягы арифметик прогрессия, буыннар саны x ка тигез, уң ягын түбәндәге рәвештә язарга була:

$$\log_2\left(\frac{1}{4}\right)^{-15} = \log_2\left(2^{-2}\right)^{-15} = 30.$$

Шуның өчен тигезләмә $\frac{2+2x}{2}x = 30$ яки $x^2 + x - 30 = 0$ рәвешен ала, монда $x_1 = -6$ (ярамый, чөнки $x > 0$), $x_2 = 5$.

Җавап. $x = 5$.

Күрсәткечле тигезләмә бер яки берничә гади тигезләмәгә китерелеп эшләнә.

Теләсә нинди күрсәткечле тигезләмәне чишә алырлык универсал метод юк, шуның өчен түбәндә гадиләштереп чишелә торган берничә тип күрсәткечле тигезләмә карыйбыз.

4.3. $a^{f_1(x)} \cdot b^{\varphi_1(x)} = c^{f_2(x)} \cdot d^{\varphi_2(x)}$ рәвешендәге тигезләмә

Логарифмның билгеләмәсе булган төп бердәйлекне $b = a^{\log_a b}$ файдаланып, бирелгән тигезләмәне уртак нигезле гади тигезләмәгә китерәбез.

Мисал. $3^{x^2-4} = 5^{2x}$.

Чишү (беренче юл). МТӨ $x \in R$. Тигезләмәнең ике ягын да бер нигезгә китерәбез. Аның өчен бергә тигез булмаган теләсә нинди уңай сан ярый. Мәсәлән, $a > 0$, $a \neq 1$. Ул вакытта бирелгән тигезләмәне түбәндәгечә язарга мөмкин: $a^{\log_a 3^{x^2-4}} = a^{\log_a 5^{2x}}$. Моннан $\log_a 3^{x^2-4} = \log_a 5^{2x}$ яки $\left(x^2 - 4\right)\log_a 3 = 2x\log_a 5$. x өчен квадрат тигезләмә табылды: $x^2\log_a 3 - 2x\log_a 5 - 4\log_a 3 = 0$.

Җавап. $x_{1,2} = \frac{\log_a 5 \pm \sqrt{\log_a^2 5 + 4\log_a^2 3}}{\log_a 3}$.

Әгәр $a = 3$ булса, тигезләмәнең чишелеше түбәндәге рәвешне ала: $x_{1,2} = \log_3 5 \pm \sqrt{\log_3^2 5 + 4}$.

Чишү (икенче юл). $3^{x^2-4} = 5^{2x} \Leftrightarrow \log_a 3^{x^2-4} = \log_a 5^{2x}$, монда $a > 0$, $a \neq 1$. Соңгы тигезләмәдән: $\left(x^2 - 4\right)\log_a 3 = 2x\log_a 5$ килеп чыга.

Ә бу тигезләмәне югарыда чиштек.

Искәрмә. Күп очракта яңа нигез итеп тигезләмәдәге функцияләрнең берсенең нигезен алалар.

Мәсәлән, без караган тигезләмәне турыдан-туры $3^{x^2-4} = 3^{2x\log_3 5}$ рәвешендә язарга була иде. Моннан x өчен квадрат тигезләмә $x^2 - 2x\log_3 5 - 4 = 0$ килеп чыга.

Мисал. $5^x \cdot 8^{\frac{x-1}{x}} = 500$.

Чишү. МТӨ $x \neq 0$. Нигезләрне тигезләп табабыз: $5^x \cdot 5^{log_5 8^{\frac{x-1}{x}}} = 5^{log_5 500} \Leftrightarrow 5^{x+\left(1-\frac{1}{x}\right)log_5 8} = 5^{log_5 500} \Leftrightarrow x + \left(1-\frac{1}{x}\right)log_5 8 = log_5 500$. $500 = 5^3 \cdot 2^2$, $8 = 2^3$ булганлыктан, $log_5 500 = 3 + 2log_5 2$ һәм $log_5 8 = 3log_5 2$ икәне килеп чыга, һәм соңгы тигезләмә түбәндәге рәвешне ала: $x + 3\left(1-\frac{1}{x}\right)log_5 2 = 3 + 2log_5 2 \Leftrightarrow x^2 + \left(log_5 2 - 3\right)x - -3log_5 2 = 0$. Моннан $x_1 = 3$; $x_2 = -log_5 2$.

Җавап. $x_1 = 3$; $x_2 = -log_5 2$.

Әгәр тигезләмәдә $a^{f(x)} \cdot b^{\varphi(x)} = c^{\varphi(x)}$. $a = d^{m_1}$, $b = d^{m_2}$, $c = d^{m_3}$ булса, яңа нигез итеп d санын алалар.

Мисаллар. а) $\sqrt{2} \cdot 0{,}5^{\frac{5}{4\sqrt{x}+10}} - 4^{\frac{1}{\sqrt{x}+1}} = 0$.

Чишү. МТӨ $x \geq 0$. Бу тигезләмәдә уртак нигез 2 гә тигез: $2^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{4\sqrt{x}+10}} = 4^{\frac{2}{\sqrt{x}+1}} \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{2}-\frac{5}{4\sqrt{x}+10}} = 2^{\frac{2}{\sqrt{x}+1}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{5}{4\sqrt{x}+10} = \frac{2}{\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 4x - 12\sqrt{x} - 40 = 0$. $\sqrt{x}$ ны z аша билгелибез ($z \geq 0$), ул вакытта соңгы тигезләмә $z^2 - 3z - 10 = 0$ рәвешенә килә. Моннан $z_1 = -2$ (ярамый); $z_2 = 5$ яки $\sqrt{x} = 5$.

Җавап. $x = 25$.

б) $\sqrt[x-4]{5^{\frac{x}{\sqrt{x}+2}} \cdot 0{,}2^{\frac{4}{\sqrt{x}+2}}} = 125(0{,}04)^{\frac{x-2}{x-4}}$.

Чишү. МТӨ $x \geq 0$, $x \neq 4$. Бу тигезләмәдә уртак нигез итеп 5 санын алырга була. $5^{\frac{x}{(\sqrt{x}+2)(x-4)}} \cdot 5^{\frac{-4}{(\sqrt{x}+2)(x-4)}} = 5^3 \cdot 5^{-2\frac{x-2}{x-4}} \Leftrightarrow \frac{x-4}{\left(\sqrt{x}+2\right)(x-4)} = 3 - 2\frac{x-2}{x-4} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{x-8}{x-4} = \frac{x-8}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} \Leftrightarrow 1 = \frac{x-8}{\sqrt{x}-2} \Leftrightarrow x - 6 = = \sqrt{x} \Rightarrow x = 9$.

Җавап. $x = 9$.

Әгәр тигезләмә $a^{f(x)} = b^{f(x)}$ рәвешендә булса, ул вакытта аны түбәндәгечә гадиләштерергә була: $a^{f(x)} = b^{f(x)} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = 1 \Rightarrow f(x) = 0$.

Мисаллар. а) $7^x = 3^x$.

Чишү. $7^x = 3^x \Leftrightarrow \left(\frac{7}{3}\right)^x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{3}\right)^x = \left(\frac{7}{3}\right)^0 \Rightarrow x = 0.$

Җавап. $x = 0.$

б) $6^{2x+4} = 2^{x+8} \cdot 3^{3x}$.

Чишү. $3^{2x+4} \cdot 2^{2x+4} = 2^{x+8} \cdot 3^{3x} \Leftrightarrow 3^{2x+4-3x} = 2^{x+8-2x-4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^{4-x} = 2^{4-x} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{4-x} = 1 \Leftrightarrow 4 - x = 0.$

Җавап. $x = 4.$

в) $5 \cdot 2^{x^2} - 3^{x+1} = 2^{x^2+1} + 5 \cdot 3^x$.

Чишү. МТӨ $x \in R$. Охшаш буыннарны берләштереп табабыз:

$5 \cdot 2^{x^2} - 2 \cdot 2^{x^2} = 5 \cdot 3^x + 3 \cdot 3^x \Leftrightarrow (5-2)2^{x^2} = (5+3)3^x \Leftrightarrow 3 \cdot 2^{x^2} = 8 \cdot 3^x.$

Соңгы тигезләмәдә уртак нигезләргә китерәбез: $2^{log_2 3} \cdot 2^{x^2} =$

$= 2^3 \cdot 2^{log_2 3^x} \Leftrightarrow 2^{x^2 + log_2 3} = 2^{3 + log_2 3} \Leftrightarrow x^2 + log_2 3 = 3 + x log_2 3.$

Моннан $x_{1,2} = \frac{+log_2 3 \pm \sqrt{log_2^2 3 - 4 log_2 3 + 12}}{2}$.

Җавап. $x_{1,2} = \left(log_2 3 \pm \sqrt{log_2^2 \frac{3}{4} + 8}\right) / 2.$

г) $3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1}$.

Чишү. $3 \cdot 4^x + \frac{81}{3} 9^x = 6 \cdot 4 \cdot 4^x - \frac{9}{2} 9^x \Leftrightarrow \left(27 + \frac{9}{2}\right) 9^x = (24 - 3) 4^x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{9}{4}\right)^x = \frac{2}{3}.$

Нигезләрен тигезлибез: $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$, моннан $2x = -1$.

Җавап. $x = -0{,}5.$

д) $5^{2x-1} + 2^{2x} - 5^{2x} + 2^{2x+2} = 0$.

Чишү. $5^{2x}\left(5^{-1} - 1\right) + 2^{2x}\left(1 + 2^2\right) = 0 \Leftrightarrow 5^{2x}\left(-\frac{4}{5}\right) + 2^{2x} \cdot 5 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5 \cdot 2^{2x} = \frac{4}{5} \cdot 5^{2x} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{5}\right)^2$, моннан $2x = 2$.

Җавап. $x = 1.$

Күнегүләр

1. $3^{x-5} = 7$.

2. $\left(3^{\sqrt[5]{x}}\right)^{\frac{1}{x}} = 3^{\sqrt{x}-4}$.

3. $2^{2x-3} = 4^{x^2-3x-1}$.

4. $\sqrt{3} \cdot 3^{\frac{x}{1+\sqrt{x}}}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2+\sqrt{x}+x}{2(1+\sqrt{x})}} = 81$.

5. $\sqrt{2^x\sqrt[3]{4^x(0{,}125)^{1/x}}} = 4\sqrt[3]{2}$.

6. $6^{x+2} = 2^{x^2} \cdot 3^{x+2}$.

7. $0{,}6^x(25/9)^{x^2-12} = \left(\frac{3}{5}\right)^9$.

8. $7^{x+2} - \frac{1}{7} \cdot 7^{x+1} - 14 \cdot 7^{x-1} + 2 \cdot 7^x = 48$.

9. $2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$.

10. $9^x - 2^{x+0{,}5} = 2^{x+3{,}5} - 3^{2x-1}$.

11. $3^x \cdot 8^{\frac{x}{x+2}} = 6$.

Җаваплар

1. $x = 5 + log_3 7$.
2. $x = 25$.
3. $x_1 = 2 + \sqrt{\frac{7}{2}}$; $x_2 = 2 - \sqrt{\frac{7}{2}}$.
4. $x = 81$.
5. $x_1 = -\frac{1}{5}$; $x_2 = 3$.
6. $x_1 = -1$; $x_2 = 2$.
7. $x_1 = -2{,}5$; $x_2 = 3$.
8. $x = 0$.
9. $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$.
10. $x = 1{,}5$.
11. $x_1 = 1$; $x_2 = -2\,log_3 6$.

4.4. $R\left(a^{f(x)}\right) = 0$ рәвешендәге тигезләмәләр

Монда R – $a^{f(x)}$нә карата рациональ функция, $a^{f(x)}$не z аша тамгаласак, бу тигезләмә рациональ тигезләмәгә әверелә. Мәсәлән, $Aa^{2f(x)} + Ba^{f(x)} + C = 0$ тигезләмәсендә $a^{f(x)}$ аңлатмасын z ка алмаштырсак, квадрат тигезләмә килеп чыга.

Мисаллар. а) $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$.

Чишү. $3^{2x^2} \cdot 9^{-1} - 36 \cdot 3^{x^2} \cdot 3^{-3} + 3 = 0$. 3^{x^2} ны z $(z > 0)$ка алмаштырып, түбәндәге тигезләмәне табабыз: $\frac{z^2}{9} - 36 \cdot z \cdot \frac{1}{27} + 3 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow z^2 - 12z + 27 = 0$. Моннан $z_1 = 3$, $z_2 = 9$, x өчен ике гади тигезләмә таптык: $3^{x^2} = 3$, $3^{x^2} = 9$ һәм моннан $x^2 = 1$, $x^2 = 2$ килеп чыга.

Җавап. $x_{1,2} = \pm 1$; $x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$.

б) $100^{\frac{1}{x}} + 25^{\frac{1}{x}} = 4{,}25 \cdot 50^{\frac{1}{x}}$.

Чишү. МТӨ $x \neq 0$. $25^{\frac{1}{x}} \cdot 4^{\frac{1}{x}} + 25^{\frac{1}{x}} = 4{,}25 \cdot 25^{\frac{1}{x}} \cdot 2^{\frac{1}{x}}$. $25^{\frac{1}{x}} \neq 0$, шунлыктан соңгы тигезләмәне аңа кыскартабыз һәм тамырдаш тигезләмә табабыз: $4^{\frac{1}{x}} + 1 = 4{,}25 \cdot 2^{\frac{1}{x}}$. $2^{\frac{1}{x}}$ не z ка алмаштырып $(z > 0)$, квадрат тигезләмәгә күчәбез: $z^2 - 4{,}25z + 1 = 0$. Моннан $z_1 = \frac{1}{4}$; $z_2 = 4$. $2^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{4}$ һәм $2^{\frac{1}{x}} = 4$ тигезләмәләрен чишеп табабыз: $x_1 = -\frac{1}{2}$; $x_2 = \frac{1}{2}$.

Җавап. $x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$.

в) $5^{x-1} + 5 \cdot 0{,}2^{x-2} = 26$.

Чишү. 5^x не z ка алыштырып һәм $0{,}2 = -\frac{1}{5}$ икәнен исәпләп, тигезләмә табабыз: $\frac{z}{5} + 5 \cdot z^{-1} \cdot 5^2 = 26$ яки $z^2 - 130z + 625 = 0$. Моннан $z_1 = 5$; $z_2 = 125$. $5^x = 5$ һәм $5^x = 125$ тигезләмәләрен чишеп, табабыз: $x_1 = 1$; $x_2 = 3$.

Җавап. $x_1 = 1$; $x_2 = 3$.

г) $\frac{8^x + 2^x}{4^x - 2} = 5$.

Чишү. МТӨ $4^x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$.

Бирелгән тигезләмәдә уртак нигез булып 2 саны тора. 2^x не z $(z > 0)$ ка алыштырып, түбәндәге тигезләмәне табабыз: $\frac{z^3 + z}{z^2 - 2} = 5$ яки $z^3 - 5z^2 + z + 10 = 0$, моннан $z_1 = 2$, $z_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{2}$, $z_3 = \frac{3 - \sqrt{29}}{2}$ (ярамый).

Шулай итеп, $2^x = 2$ һәм $2^x = \frac{3 + \sqrt{29}}{2}$.

Җавап. $x_1 = 1$; $x_2 = -1 + log_2\left(3 + \sqrt{29}\right)$.

д) $2^{3x} - \frac{8}{2^{3x}} - 6\left(2^x - \frac{1}{2^{x-1}}\right) = 1$.

Чишү. 2^x не $z(z > 0)$ ка алыштырып табабыз: $z^3 - \frac{8}{z^3} - 6\left(z - \frac{8}{z}\right) = 1$.

Бу тигезләмәнең сул ягы $z - \frac{2}{z}$ аермасының кубына тигез икә-

нен искә алып, тигезләмәнең рәвешен үзгәртәбез: $\left(z-\frac{2}{z}\right)^3=1$ яки $z-\frac{2}{z}=1 \Leftrightarrow z^2-z-2=0$, моннан $z_1=-1$ (ярамый), $z_2=2$. $2^x=2$ тигезләмәсеннән $x=1$ табыла.

Җавап. $x=1$.

е) $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x+\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x=14$.

Чишү. $7+\sqrt{48}=\frac{1}{7-\sqrt{48}}$ икәнен искә алып, бирелгән тигезләмәне түбәндәге рәвештә язарга мөмкин: $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x+\frac{1}{\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x}=14$.

$\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x$ ны $z(z>0)$ ка алыштырып табабыз: $z+1/z=14 \Leftrightarrow$ $z^2-14z+1=0 \Rightarrow z_{1,2}=7\pm\sqrt{48}$, моннан $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x=7\pm\sqrt{48}$.

Җавап. $x_{1,2}=\pm2$.

4.5. $A_a{}^{2f(x)}+Bb^{2f(x)}+C(a\cdot b)^{f(x)}=0$ рәвешендәге тигезләмә

Мондый тигезләмәнең ике ягын да $b^{2f(x)}$ ка бүлсәк, ул югарыда каралган тигезләмәләргә кайтып кала: $A\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}+B+C\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}=0$. $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}$ ны z ка алыштырып, $Az^2+Cz+B=0$ тигезләмәсен табабыз. Монда $z>0$.

Мисаллар. а) $81\cdot3^{2x}-36\cdot2^{2x}+45\cdot6^x=0$.

Чишү. $A=81$, $B=-36$, $C=45$, $a=3$, $b=2$. Тигезләмәнең ике ягын да 2^{2x} ка бүләбез: $81\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-36+45\left(\frac{3}{2}\right)^x=0$. $\left(\frac{3}{2}\right)^x$ не $z(z>0)$ ка алыштырып, $81z^2+45z-36\neq0$ тигезләмәсен яки $9z^2+5z-4=0$ тигезләмәсен табабыз. Моннан $z_1=-1$ (ярамый), $z_2=\frac{4}{9}$: $\left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{4}{9}$ тигезләмәсен чишеп, $x=-2$ икәнен табабыз.

Җавап. $x=-2$.

б) $81^x-16^x-2\cdot9^x\left(9^x-4^x\right)+36^x=0$.

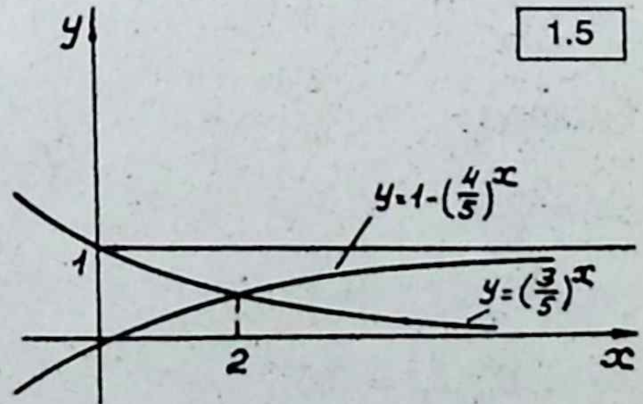
Чишү. $9^{2x}-4^{2x}-2\cdot 9^{2x}+2(9\cdot 4)^x+(9\cdot 4)^x=0$.

Тигезләмәнең ике ягын да 4^{2x} ка бүләбез: $\left(\frac{9}{4}\right)^{2x}-1-2\left(\frac{9}{4}\right)^{2x}+$ $+2\left(\frac{9}{4}\right)^{x}+\left(\frac{9}{4}\right)^{x}=0$, $\left(\frac{9}{4}\right)^{x}$ не $z(z>0)$ ка алыштырып, тигезләмә табабыз: $z^2-1-2z^2+2z+z=0\Leftrightarrow z^2-3z+1=0$. Моннан $z_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$; $\left(\frac{9}{4}\right)^{x}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Җавап. $x_{1,2}=log_{9/4}\left(3\pm\sqrt{5}\right)/2$.

4.6. Тигезләмәләрне сайлап алу юлы белән чишү

Кайчак (теге яки бу юл белән) тигезләмәләрнең бер яки берничә тамырын сайлап алу юлы белән табарга була. Шулай да, әгәр тигезләмәнең башка тамырлары юклыгы исбат ителмәсә, мондый чишү юлын законлы дип әйтеп булмый. Мәсәлән, $x=2$ не $3^x+4^x=5^x$ тигезләмәсенә куеп карап, аның тамыр икәненә ышанырга була. Хәзер башка тамырларның юклыгын исбатларга кирәк. Тигезләмәнең ике ягын да $5^x\neq 0$ кә бүләбез һәм эквивалент тигезләмә табабыз: $\left(\frac{3}{5}\right)^{x}+\left(\frac{4}{5}\right)^{x}=1$. Бу тигезләмәнең $x<2$ булган тамырлары бармы икәнен карыйк. Күрсәткечле функциянең үзлеге буенча, нигезе бердән ким булганда, түбәндәге тигезсезлекләр урынлы: $\left(\frac{3}{5}\right)^{x}>\left(\frac{3}{5}\right)^{2}$, $\left(\frac{4}{5}\right)^{x}>\left(\frac{4}{5}\right)^{2}$. Тигезсезлекләрне кушып табабыз: $\left(\frac{3}{5}\right)^{x}+$ $+\left(\frac{4}{5}\right)^{x}>\left(\frac{3}{5}\right)^{2}+\left(\frac{4}{5}\right)^{2}=1$, ягъни тигезләмәнең сул ягы 1 гә тигез түгел, димәк, тигезләмәнең тамыры 2 дән кечкенә була алмый. Шундый юл белән 2 дән зур булмавын да исбатлыйк. Аның өчен $x>2$ дип алыйк, ул вакытта $\left(\frac{3}{5}\right)^{x}<\left(\frac{3}{5}\right)^{2}$ һәм $\left(\frac{4}{5}\right)^{x}<\left(\frac{4}{5}\right)^{2}$, болардан $\left(\frac{3}{5}\right)^{x}+\left(\frac{4}{5}\right)^{x}<\left(\frac{3}{5}\right)^{2}+$ $+\left(\frac{4}{5}\right)^{2}=1$. Шулай итеп, $x=2$ тигезләмәнең бердәнбер тамыры булып тора.



Бу нәтиҗәне 1.5 рәсемендә китерелгән график буенча да исбатларга була.

Күнегүләр

1. $3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = 0,2.$

2. $4^{x^2+2} - 9 \cdot 2^{x^2+2} + 8 = 0.$

3. $\left(\sqrt[5]{3}\right)^x + \left(\sqrt[10]{3}\right)^{x-10} = 84.$

4. $\sqrt[x]{64} + \sqrt[x]{2^{3x+3}} + 12 = 0.$

5. $2^{x+\sqrt{x^2-4}} - 5\left(\sqrt{2}\right)^{x-2+\sqrt{x^2-4}} - 6 = 0.$

6. $10^{1+x^2} - 10^{1-x^2} = 99.$

7. $5^{1+x^2} - 5^{1-x^2} = 24.$

8. $9^x + 6^x = 2^{2x+1}.$

9. $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x.$

10. $27^x - 13 \cdot 9^x + 13 \cdot 3^{x+1} - 27 = 0.$

11. $27 \cdot 2^{-3x} + 9 \cdot 2^x - 2^{3x} - 27 \cdot 2^{-x} = 8.$

12. $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4.$

13. $25^{2x-x^2+1} + 9^{2x-x^2+1} = 34 \cdot 15^{2x-x^2}.$

14. $2^{2x^2} + 2^{x^2+2x+2} = 2^{5+4x}.$

15. $\left(\sqrt{5\sqrt{2}-7}\right)^x + 6\left(\sqrt{5\sqrt{2}+7}\right)^x = 7.$

16. $5^x + 12^x = 13^x.$

17. $2^x = 1 - x.$

Җаваплар

1. $x = 0.$

2. $x_1 = -1;\ x_2 = 1.$

3. $x = 20.$

4. $x_1 = 3;\ x_2 = 1/log_8 6.$

5. $x = 2,5.$

6. $x_{1,2} = \pm 1.$

7. $x_{1,2} = \pm 1.$

8. $x = 0.$

9. $x_1 = 0;\ x_2 = 0,5.$

10. $x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ x_3 = 2.$

11. $x = 0.$

12. $x_{1,2} = \pm 2.$

13. $x_{1,2} = 1 \pm\sqrt{3}$; $x_3 = 0$; $x_4 = 2$. 14. $x_{1,2} = 1 \pm\sqrt{3}$.

15. $x_1 = 0$; $x_2 = 2 / log_6\left(5\sqrt{2} - 7\right)$.

16. $x = 2$. 17. $x = 0$.

4.7. $log_a f(x) = log_a \varphi(x)$ $\left(a > 0, \neq 1; f(x) > 0, \varphi(x) > 0\right)$ рәвешендәге тигезләмәләр

Бу тигезләмәне иң гади логарифмик тигезләмә дип алыйк. Бирелгән тигезләмә логарифмик функциянең үзлеге буенча $f(x) = \varphi(x)$ тигезләмәсенә тамырдаш.

$a > 0$, $a \neq 1$, $f(x) > 0$, $\varphi(x) > 0$ тигезсезлекләр системасы баштагы тигезләмәнең МТӨ аныклый. Кайчакта иң гади тигезләмә $log_a f(x) = c$ рәвешендә бирелә, ә.бу $a > 0$, $\neq 1$, $f(x) > 0$ булганда, $f(x) = a^c$ тигезләмәсенә эквивалентлы. Логарифмик тигезләмәләрнең күплекләр өлкәсен аныклап, чишә башлыйлар.

Мисаллар. а) $log_{1-x}\left(2x^2 + x + 1\right) = 2$.

Чишү. МТӨ x өчен түбәндәге система белән билгеләнә;

$$\begin{cases} 1 - x > 0, \\ 1 - x \neq 1, \\ 2x^2 + x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Табылган МТӨ өчен баштагы тигезләмә $2x^2 + x + 1 = (1 - x)^2$ тигезләмәсенә тамырдаш. Моннан $x_1 = 0$ (ярамый); $x_2 = -3$.

Җавап. $x = -3$.

б) $lg\left(x + 1{,}5\right) = -lgx$

Чишү. МТӨ: $\begin{cases} x > 0, \\ x + 1{,}5 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0$.

$-lgx = lgx^{-1}$ булганлыктан, бирелгән тигезләмәне түбәндәге рәвештә язарга мөмкин: $lg(x + 1{,}5) = lgx^{-1} \Leftrightarrow x + 1{,}5 = \frac{1}{x} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2 + 1{,}5x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2$ (ярамый), $x_2 = \frac{1}{2}$.

Җавап. $x = 0{,}5$.

МТӨн аныклау кайчак шактый авыр. Бу очракта логарифмик тигезләмәләрнең табылган тамырын турыдан-туры тигезләмәгә куеп, я булмаса, МТӨн аныклый торган тигезсезлекләр системасына куеп тикшерәләр.

Мисал. $log_{1+x}\left(2x^3 + 2x^2 - 3x + 1\right) = 3$.

Чишү. МТӨ:

$$\begin{cases}1 + x > 0,\\ 1 + x \neq 1,\\ 2x^3 + 2x^2 - 3x + 1 > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x > -1,\\ x \neq 0,\\ 2x^3 + 2x^2 - 3x + 1 > 0.\end{cases}$$

Бу системаны канәгатьләндерүче билгесезләр өчен баштагы тигезләмә түбәндәге тигезләмәгә тамырдаш:

$$2x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = \left(1 + x\right)^3 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 6x = 0.$$

$x_1 = -2$ (МТӨнә керми); $x_2 = 0$ (МТӨнә керми); $x_3 = 3$. Тигезсезлекләр системасына куеп, тамыр икәненә ышанабыз.

Җавап. $x = 3$.

Логарифмик тигезләмәләр бер яки берничә гади тигезләмәгә китереп чишеләләр.

Теләсә нинди логарифмик тигезләмәне чишү өчен универсал методлар юк, шуның өчен гадиләштерү ысулы белән чишелә торган берничә тип логарифмик тигезләмә карыйбыз.

4.8. $A \log_a f(x) + B \log_a \varphi(x) = C \log_a \Psi(x)$ $\left(a > 0,\ a \neq 1,\ f(x) > 0,\ \varphi(x) > 0,\ \Psi(x) > 0\right)$ рәвешендәге тигезләмәләр

Дәрәҗәнең һәм тапкырчыгышның логарифмнары формулаларын кулланып, табабыз: $log_a f^A(x)\left(\varphi(x)\right)^B = log_a\left(\Psi(x)\right)^C$, моннан $\left(f(x)\right)^A\left(\varphi(x)\right)^B = \left(\Psi(x)\right)^C$. Соңгы тигезләмә $a > 0$, $a \neq 1$, $f(x) > 0$, $\varphi(x) > 0$, $\Psi(x) > 0$ булганда, баштагы тигезләмәгә тамырдаш.

Мисаллар. а) $lg5 + lg(x + 10) = 1 - lg(2x - 1) + lg(21x - 20)$.

Чишү. МТӨ: $\begin{cases}x + 10 > 0,\\ 2x - 1 > 0,\\ 21x - 20 > 0\end{cases} \Rightarrow x > \frac{20}{21}.$

$lg10 = 1$ икәнен искә алып, бирелгән тигезләмәне түбәндәге рәвештә язарга мөмкин: $lg5 + lg(x + 10) = lg10 - lg(2x - 1) + lg(21x - 20) \Leftrightarrow 5(x + 10) = 10(2x - 1)^{-1}(21x - 20) = 2x^2 - 23x + 30 = 0$.

Җавап. $x_1 = 1{,}5$; $x_2 = 10$.

б) $log_{1-x}3 - log_{1-x}2 - 0{,}5 = 0$.

Чишү. МТӨ: $\begin{cases} 1 - x > 0, \\ 1 - x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1, \\ x \neq 0. \end{cases}$

$$log_{1-x}3 - log_{1-x}2 = 0{,}5 \Leftrightarrow log_{1-x}\frac{3}{2} = 0{,}5 \Leftrightarrow (1 - x)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \Rightarrow 1 - x = \frac{9}{4}.$$

Җавап. $x = -5/4$.

в) $\frac{lg(2x-19) - lg(3x-20)}{lgx} = -1$.

Чишү. МТӨ: $\begin{cases} 2x - 19 > 0, \\ 3x - 20 > 0, \Rightarrow x > \frac{19}{2}. \\ x > 0,\ x \neq 1 \end{cases}$

$$lg(2x - 19) - lg(3x - 20) = -lgx \Leftrightarrow lg\frac{2x-19}{3x-20} = lg\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{2x-19}{3x-20} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 11x + 10 = 0.$$

Моннан $x_1 = 1$ (МТӨнә керми); $x_2 = 10$.

Җавап. $x = 10$.

г) $\frac{2}{\sqrt{3}log_2\sqrt{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{log_2(-x)}} = 0$.

Чишү. МТӨ: $log_2(-x) > 0 \Leftrightarrow -x > 1 \Leftrightarrow x < -1$.

$x < -1$ булганлыктан, $\sqrt{x^2} = |x| = -x$, димәк, бирелгән тигезләмәне болай язарга була: $\frac{2}{\sqrt{3}\,log_2(-x)} - \frac{1}{\sqrt{log_2(-x)}} = 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{3}\sqrt{log_2(-x)} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{log_2(-x)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow log_2(-x) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow -x = 2^{\frac{4}{3}}$.

Җавап. $x = -\sqrt[3]{16}$.

Күнегүләр

1. $log_2 182 - 2log_2\sqrt{5-x} = log_2(11-x) + 1$.

2. $0{,}5\left(lg\left(x^2 - 55x + 90\right) - lg(x-36)\right) = lg\sqrt{2}$.

3. $\dfrac{lg8 - lg(x-5)}{lg\sqrt{x+7} - lg2} = -1$.

4. $2log_5(x-2) + log_3(x-4)^2 = 0$.

Җаваплар

1. $x = -2$.
2. $x = 54$.
3. $x = 29$.
4. $x_1 = 3,\ x^2 = 3 + \sqrt{2}$.

4.9. $F(\log_a f(x)) = 0 \quad (a > 0,\ a \neq 1,\ f(x) > 0)$ рәвешендәге тигезләмәләр

Монда F — аргументы $log_a f(x)$ булган функция; $log_a f(x)$ны z белән алыштырып, бу тигезләмә рациональ яки иррациональ тигезләмә рәвешенә китерелә. Мәсәлән, $Alog_a^2 f(x) + Blog_a f(x) + C$ тигезләмәсендә $log_a f(x)$ ны z белән алыштыргач, квадрат тигезләмә барлыкка килә:

$$AZ^2 + BZ + C = 0.$$

Мисаллар. а) $2lgx^2 - lg^2(-x) = 4$.

Чишү. МТӨ: $x < 0$. Бу очракта $|x| = -x$, $lgx^2 = 2lg|x| = 2lg(-x)$, шуның өчен, бирелгән тигезләмәне болай язабыз: $4lg(-x) - lg^2(-x) = 4$.

$lg(-x)$ ны z дип билгеләп табабыз: $4z - z^2 = 4$. Моннан $z = 2$. x ны табу өчен гади тигезләмә килеп чыга $lg(-x) = 2$. $-x = 10^2$.

Җавап. $x = -100$.

б) $log_x\sqrt{2} - log_x^2\sqrt{2} = log_3 27 - log_x(2x)$.

Чишү. МТӨ: $x > 0, x \neq 1$. $\log_x\sqrt{2} - \log_x^2\sqrt{2} = 3 - (\log_x 2 + \log_x x) \Leftrightarrow$ $\log_x\sqrt{2} - \log_x^2\sqrt{2} = 3 - 2\log_x\sqrt{2} - 1$. $\log_x\sqrt{2}$ ны z белән алмаштырып табабыз: $z - z^2 = 3 - 2z - 1 \Leftrightarrow z^2 - 3z + 2 = 0$, моннан $z_1 = 1$, $z_2 = 2$. $\log_x\sqrt{2} = 1$ һәм $\log_x\sqrt{2} = 2$ гади тигезләмәләрен чишеп табабыз: $x = \sqrt{2}$ һәм $x^2 = \sqrt{2}$ яки $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt[4]{2}$, $x_3 = -\sqrt[4]{2}$. (МТӨнә керми).

Җавап. $x_1 = \sqrt{2}$; $x_2 = \sqrt[4]{2}$.

в) $\lg(x^2 + 1) = 2\lg^{-1}(x^2 + 1) - 1$.

Чишү. МТӨ: $x \neq 0$, чөнки бирелгән тигезләмәдә $\lg(x^2 + 1) \neq 0$. $\lg(x^2 + 1)$ не z белән алмаштырып табабыз: $z = \frac{2}{z} - 1$ яки $z^2 + z - 2 = 0$, моннан $z_1 = -2$, $z_2 = 1$. x ны табу өчен ике тигезләмә килеп чыкты: $\lg(x^2 + 1) = -2$, $\lg(x^2 + 1) = 1$.

Беренче тигезләмәнең чишелеше юк, чөнки ул $x^2 + 1 = \frac{1}{100}$ тигезләмәсенә тамырдаш. $x^2 + 1 = 10$ тигезләмәсен чишеп табабыз: $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.

Җавап. $x_{1,2} = \pm 3$.

г) $\lg^4(x - 1)^2 + \lg^2(x - 1)^3 = 25$.

Чишү. МТӨ: $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Монда $\lg^4(x - 1)^2 = (2\lg(x - 1))^4 = 16\lg^4(x - 1)$. $\lg^2(x - 1)^3 = (3\lg(x - 1))^2 = 9\lg^2(x - 1)$. Бирелгән тигезләмәнең рәвешен үзгәрткәннән соң, болай була: $16\lg^4(x - 1) + 9\lg^2(x - 1) = 25$. $\lg(x - 1)$ не z белән алмаштырып, биквадрат тигезләмә табабыз: $16z^4 + 9z^2 = 25$. Моннан $z = \pm 1$. Шулай итеп, $\lg(x - 1) = \pm 1$, моннан $x - 1 = 10$ һәм $x - 1 = \frac{1}{10}$.

Җавап. $x_1 = 11$; $x_2 = \frac{11}{10}$.

д) $\sqrt{log_5 x} + \sqrt[3]{log_5 x} = 2$.

Чишү. МТӨ: $log_5 x > 0 \Rightarrow x > 1$. Тамырларны бер үк дәрәҗәгә китерәбез: $\sqrt[6]{log_5^3} + \sqrt[6]{log_5^2 x} = 2$. $\sqrt[6]{log_5 x}$ ны z ка алмаштырып табабыз: $z^3 + z^2 - 2 = 0$; $z = 1 \Rightarrow \sqrt[6]{log_5 x} = 1 \Leftrightarrow log_5 x = 1$.

Җавап. $x = 5$.

е) $\sqrt{log_x \sqrt{5x}} = -log_x 5$.

Чишү. x ның мөмкин булган кыйммәтләре өчен тигезләмәнең сул ягы уңай сан, шуның өчен $-log_x 5 > 0$ булуы кирәк; моннан x ның МТӨ һәм тигезләмәнең ике ягының да уртак уңай тамгасы шарты түбәндәге системага китерә:

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ \log_x 5 < 0, \\ \log_x \sqrt{5x} > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < x \leq \frac{1}{5}.$$

Баштагы тигезләмәнең ике ягын да квадратка күтәрәбез:

$$\left(\sqrt{log_x \sqrt{5x}}\right)^2 = \left(-log_x 5\right)^2.$$

Моннан $log_x \sqrt{5x} = log_x^2 5 \Leftrightarrow \frac{1}{2} log_x 5 + \frac{1}{2} = log_x^2 5 \Leftrightarrow log_x 5 + 1 = 2log_x^2 5$.

$log_x 5$ не z белән алыштырабыз: $2z^2 - z - 1 = 0$. Моннан $z_1 = 1$, $z_2 = -\frac{1}{2}$. $log_x 5 = 1$ тигезләмәсеннән: $x = 5$ (МТӨнә керми); $log_x 5 = -\frac{1}{2}$ тигезләмәсеннән: $x = \frac{1}{25}$.

Җавап. $x = \frac{1}{25}$.

Күнегүләр

1. $3lgx^2 - lg^2(-x) = 9$.

2. $\sqrt{2log_8(-x)} - log_8 \sqrt{x^2} = 0$.

3. $\frac{log_3 x - 1}{log_3 x/3} - 2\, log_3 \sqrt{x} + log_3^2 x = 3$.

4. $lg^2(100x) + lg^2(10x) = 14 + lg\,1/x$.

5. $log_2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{log_2 x} = 4/3$.

Җаваплар

1. $x = -1000$.

2. $x_1 = -64$; $x_2 = -1$.

3. $x_1 = \frac{1}{3}$; $x_2 = 9$.

4. $x_1 = 10^{-9/2}$; $x_2 = 10$.

5. $x = 2$.

4.10. Нигезләре төрле булган логарифмлы тигезләмәләр

Мондый тигезләмәләр $log_a b = 1/log_b a$, $log_a x = \frac{log_b x}{log_b a}$, $log_{a^k} b = \frac{1}{k} log_a b$ аңлатмалары ярдәмендә уртак нигезле логарифмнарга күчәләр, ә аларны чишү юлы килеп чыккан тигезләмәнең рәвешенә бәйле.

Мисаллар. а) $log_k x + log_{\sqrt{k}} x + \ldots + log_{\sqrt[k]{k}} x = \frac{k+1}{2}$.

Чишү. МТӨ: $x > 0$, $k > 0$, $k \neq 1$. Бу тигезләмәдә барлык логарифмнарны уртак нигезгә китерәбез. Уртак нигез итеп, берәмлеккә тигез булмаган теләсә нинди уңай санны алырга була. Мәсәлән, $a > 0, a \neq 1$, ул вакытта бирелгән тигезләмә болай була:

$$\frac{log_a x}{log_a k} + \frac{log_a x}{log_a \sqrt{k}} + \frac{log_a x}{log_a \sqrt[3]{k}} + \ldots + \frac{log_a x}{log_a \sqrt[k]{k}} = \frac{k+1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow log_a x \left(\frac{1}{log_a k} + \frac{2}{log_a k} + \frac{3}{log_a x} + \ldots + \frac{k}{log_a x} \right) = \frac{k+1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{log_a x}{log_a k}(1 + 2 + 3 + \ldots + k) = \frac{k+1}{2}.$$

$1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{1+k}{2} k$ булганлыктан (арифметик прогрессия суммасының формуласы), $\frac{log_a x}{log_a k} \frac{1+k}{2} k = \frac{1+k}{2} \Leftrightarrow \frac{log_a x}{log_a k} = \frac{1}{k} \Leftrightarrow log_a x = \frac{1}{k} log_a k \Leftrightarrow log_a x = log_a k^{1/k}$ килеп чыга.

Соңгы гади тигезләмәне чишеп, җавапны табабыз.

Җавап. $x = k^{1/k}$.

б) $log_{4x+1}7 + log_{9x}7 = 0$.

Чишү. МТӨ: $\begin{cases} 4x+1>0, \\ 4x+1 \neq 1, \\ 9x>0, \\ 9x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0, \\ x \neq \frac{1}{9}. \end{cases}$

Тигезләмәдәге логарифмнарны уртак нигезгә китерәбез, уртак нигез итеп 7 санын алу уңайлы: $\frac{1}{log_7(4x+1)} + \frac{1}{log_7 9x} = 0 \Leftrightarrow log_7 9x + {}$ $+log_7(4x+1) = 0 \Rightarrow 9x(4x+1) = 1 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{3}$ (МТӨ нә керми); $x_2 = 1/12$.

Җавап. $x_2 = 1/12$.

в) $\sqrt{log_3 x^9} - 4log_9\sqrt{3x} = 1$.

Чишү. МТӨ: $log_3 x \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$. Уртак нигез итеп 3 санын алабыз: $\sqrt{9log_3 x} - 4\frac{log_3\sqrt{3x}}{log_3 9} = 1 \Leftrightarrow 3\sqrt{log_3 x} - \frac{4}{2}\,\frac{1}{2}(log_3 3 + log_3 x) =$ $= 1 \Leftrightarrow 3\sqrt{log_3 x} - (1 + log_3 x) = 1 \Leftrightarrow log_3 x - 3\sqrt{log_3 x} + 2 = 0$.

$\sqrt{log_3 x}$ ны z ка алыштырсак, тигезләмә болай була: $z^2 - 3z + 2 = 0$, моннан $z_1 = 1$; $z_2 = 2$. $\sqrt{log_3 x} = 1$ һәм $\sqrt{log_3 x} = 2$ тигезләмәләрен чишеп табабыз: $x_1 = 3$; $x_2 = 3^4$.

Җавап. $x_1 = 3$; $x_2 = 81$.

г) $(log_{\sqrt{3}}x)\sqrt{log_{\sqrt{3}}3 - log_x 9} + 4 = 0$.

Чишү. МТӨ: $x > 0$, $x \neq 1$, $log_{\sqrt{3}}3 - log_x 9 > 0$. Барлык логарифмнарны $\sqrt{3}$ булган уртак нигезгә китерәбез:

$$(log_{\sqrt{3}}x)\sqrt{log_{\sqrt{3}}(\sqrt{3})^2 - \frac{log_{\sqrt{3}}9}{log_{\sqrt{3}}x}} + 4 = 0 \Leftrightarrow (log_{\sqrt{3}}x)\sqrt{2 - \frac{4}{log_{\sqrt{3}}x}} + 4 = 0.$$

$log_{\sqrt{3}}x$ ны z ка алмаштырып, иррациональ тигезләмә табабыз: $z\sqrt{2-\frac{4}{z}}+4=0$ яки $\sqrt{2-\frac{4}{z}}=-\frac{4}{z}$. Тигезләмәнең сул ягы уңай булганлыктан, $z<0$. Соңгы тигезләмәдәге $-\frac{4}{z}$ не u га алыштырып табабыз: $\sqrt{2+u}=u \Leftrightarrow 2+u=u^2$, моннан $u_1=-1$ (МТӨ керми); $u^2=2 \Leftrightarrow -\frac{4}{z}=2 \Leftrightarrow z=-2$ яки $\log_{\sqrt{3}}x=-2 \Rightarrow x=\left(\sqrt{3}\right)^{-2}$.

Җавап. $x=\frac{1}{3}$.

Искәрмә. Төрле нигезле логарифмнар булган тигезләмәне чишкәндә, кайвакыт, яңа нигез итеп, x аңлатмасын алу уңайлы була. Бу очракта x ның МТӨ үзгәрүе мөмкин, моңа тигезләмәләр чишкәндә игътибар итәргә кирәк.

Мисал. $5log_{\frac{x}{9}}x+log_{\frac{9}{x}}x^3+8log_{9x^2}x^2=2$.

Чишү. МТӨ: $\begin{cases} x>0, \\ x\neq 9, \\ 9x^2\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x\neq 9, \\ x\neq \frac{1}{3}. \end{cases}$

Бу тигезләмәдә уртак нигез итеп x ны алабыз:

$$5\,/\,log_x\frac{x}{9}+3\,/\,log_x\frac{9}{x}+16\,/\,log_x 9x^2=2.$$

$x\neq 1$ булу шарты аның МТӨн үзгәртә. Баштагы тигезләмәгә турыдан-туры $x=1$ не куеп, аның тамыр булмавын ачыклыйбыз, димәк, табылган тигезләмә баштагы тигезләмәгә тамырдаш:

$$\frac{5}{1-log_x 9}+\frac{3}{log_x 9-1}+\frac{16}{log_x 9+2}=2.$$

Уртак ваклаучыга китергәннән соң, $log_x^2 9-6log_x 9+8=0$ килеп чыга. $log_x 9$ ны z белән алыштырып табабыз: $z^2-6z+8=0$. Моннан $z_1=2$; $z_2=4$. $log_x 9=2$ һәм $log_x 9=4$ тигезләмәләрен чишсәк: $x^2=9$; $x^4=9$. $x_1=-3$ (МТӨ нә керми); $x_2=3$; $x_3=\sqrt{3}$; $x_4=-\sqrt{3}$ (МТӨ нә керми).

Җавап. $x_1=\sqrt{3}$; $x_2=3$.

Күнегүләр

1. $\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x = 2/3$.
2. $\lg x + \log_{\sqrt{10}} x + \log_{\sqrt[3]{10}} x + \ldots + \log_{\sqrt[10]{10}} x = 5{,}5$.
3. $\log_5(x-2) + \log_{\sqrt{5}}\left(x^3 - 2\right) + \log_{0{,}2}(x-2) = 4$.
4. $\log^2_{\frac{1}{2}} 4x + \log_2 \frac{x^2}{8} = 8$.
5. $\sqrt{\log_a x} + \sqrt{\log_x a} = 10/3$.
6. $\sqrt{\log_{0{,}04} x + 1} + \sqrt{\log_{0{,}2} x + 3} = 1$.
7. $20\log_{4x}\sqrt{x} + 7\log_{16x} x^3 - 3\log_{\frac{x}{2}} x^2 = 0$

Җаваплар

1. $x_1 = 1/9;\ x_2 = 9$.
2. $x = \sqrt[10]{10}$.
3. $x = 3$.
4. $x_1 = 1/128;\ x_2 = 2$.
5. $x_1 = a^9;\ x_2 = \sqrt[9]{a}\ \ (a > 0,\ a \neq 1)$.
6. $x = 25$.
7. $x_1 = 1/\left(4\sqrt[5]{8}\right);\ x_2 = 1;\ x_3 = 4$.

4.11. Күрсәткечле һәм логарифмик функцияләр комбинациясе булган тигезләмәләр

Мисаллар. а) $5^{\lg x} - 3^{\lg x} = \frac{16}{3} 3^{\frac{1}{2}\lg x} \cdot 5^{\frac{1}{2}(\lg x - 2)}$.

Чишү. МТӨ: $x > 0$. Ике ягын да $3^{\frac{1}{2}\lg x} \cdot 5^{\frac{1}{2}\lg x}$ ка бүлеп, күрсәткечле тигезләмәне чишәбез: $\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2}\lg x} - \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}\lg x} = \frac{16}{3} \cdot 5^{-1} = \frac{16}{15}$.

$\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2}\lg x}$ ны z белән алыштырып табабыз: $z - \frac{1}{z} = \frac{16}{15}$ яки $z^2 - \frac{16}{15} z - 1 = 0\ \ (z > 0)$.

Квадрат тигезләмәне чишеп табабыз: $z_1 = -\frac{3}{5}$ (ярамый); $z_2 = \frac{5}{3}$ моннан $\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2}\lg x} = \frac{5}{3}$. Гади тигезләмә килеп чыкты: $\frac{1}{2}\lg x = 1$, аны чишеп, тамырны табабыз: $x = 10^2$.

Җавап. $x = 100$.

б) $5^{1+\log_4 x} + 5^{\log_{0,25} x - 1} = \frac{26}{5}$.

Чишү. МТӨ: $x > 0$. Логарифмнарны 4 нигезенә китерәбез: $5^{1+\log_4 x} + 5^{-\log_4 x - 1} = \frac{26}{5} \Leftrightarrow 5 \cdot 5^{\log_4 x} + \frac{1}{5} 5^{-\log_4 x} = 5{,}2$. $5^{\log_4 x}$ ны z аша билгелибез $(z > 0)$. Табабыз: $5z + \frac{1}{5z} = 5{,}2$ яки $25z^2 - 26z + 1 = 0$, моннан $z_1 = 1/25$, $z_2 = 1$. $5^{\log_4 x} = \frac{1}{25}$, $5^{\log_4 x} = 1$. Тигезләмәләрне чишеп табабыз: $\log_4 x = -2$, $\log_4 x = 0$. Моннан $x_1 = 4^{-2}$; $x_2 = 1$.

Җавап. $x_1 = 1/16$; $x_2 = 1$.

в) $5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}$.

Чишү. МТӨ: $x > 0$. $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$ аңлатмасын файдаланып, күрсәткечле функцияләрнең нигезләрен тигезлибез: $5^{\lg x} = 50 - 5^{\lg x} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2 \cdot 5^{\lg x} = 50 \Leftrightarrow 5^{\lg x} = 25 \Leftrightarrow \lg x = 2 \Rightarrow x = 10^2$.

Җавап. $x = 100$.

Кайбер тигезләмәләрне $a^{\log_a b} = b$ бердәйлеген кулланып гадиләштерергә мөмкин.

Мисал. $5^{-2\log_{0,04}(3-4x^2)} + 1{,}5\log_{\frac{1}{8}} 4^x = 0$.

Чишү. $3 - 4x^2 > 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} < x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\left(\frac{1}{25}\right)^{\log_{\frac{1}{25}}(3-4x^2)} + 3x\log_{\frac{1}{2^3}} 2 = 0 \Rightarrow 3 - 4x^2 - \frac{3x}{3}\log_2 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Rightarrow 3 - 4x^2 - x = 0$, $x_1 = \frac{3}{4}$, $x_2 = -1$.

Җавап. $x = \frac{3}{4}$.

Күнегүләр

1. $2^{\log_3 x^2} \cdot 5^{\log_3 x} = 400$.

2. $5^{2(\log_5 2 + x)} - 2 = 5^{x + \log_5 2}$.

3. $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162$.

4. $\left(1 + \frac{1}{2x}\right)\lg 3 + \lg 2 = \lg\left(27 - \sqrt[x]{3}\right)$.

5. $log_2\left(4 \cdot 3^x - 6\right) - log_2\left(9^x - 6\right) = 1.$

6. $log_2\left(4^x + 4\right) = x + log_2\left(2^{x+1} - 3\right).$

7. $3^{lgx} = 54 - x^{lg3}.$

8. $3 \cdot 2^{log_x(3x-2)} + 2 \cdot 3^{log_x(3x-2)} = 5 \cdot 6^{log_{x^2}(3x-2)}.$

9. $log_2\left(4 - x\right) = x - 3.$

Җаваплар

1. $x = 9.$
2. $x = 0.$
3. $x_1 = \frac{1}{9};\ x_2 = 9.$
4. $x = 0{,}5.$
5. $x = 1.$
6. $x = 2.$
7. $x = 1000.$
8. $x = 2.$
9. $x = 3.$

4.12. Тигезләмәләрне логарифмлау юлы белән чишү

$a^{f(x)} \cdot b^{\varphi(x)} = c^{\psi(x)}$ рәвешле тигезләмәләрне уртак нигезләргә күчү методына эквивалент булган логарифмлау юлы белән чишәргә мөмкин. Монда шунысын истә тотарга кирәк, әгәр x ны яки x кергән аңлатманы логарифмның нигезе итеп алсак, ул вакытта x ның МТӨ үзгәрергә мөмкин.

Мисаллар. а) $27x^{log_{27}x} = x^{10/3}.$

Чишү. МТӨ: $x > 0$. Нигезне 27 дип алып, тигезләмәнең ике ягын да логарифмлыйбыз: $log_{27}27 + log^2_{27}x = \frac{10}{3}log_{27}x.$ $log_{27}x = z$ дип билгеләсәк, $1 + z^2 = \frac{10}{3}z$, моннан $z_1 = 1/3$, $z_2 = 3 = lg_{27}x.$ $log_{27}x = 3$, $log_{27}x = \frac{1}{3}$ тигезләмәләрен чишәбез. $x_1 = 27^3$, $x^2 = 27^{1/3} = 3.$

Җавап. $x_1 = 27^3;\ x_2 = 3.$

б) $x^{1-\frac{1}{3}lgx^2} - 1 / \sqrt[3]{100} = 0$.

Чишү. МТӨ: $x > 0$. $x^{1-\frac{1}{3}lgx^2} = 10^{-\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \left(1 - \frac{2}{3}lgx\right)lgx = -\frac{2}{3}$.

$lgx = z$ дип билгелибез: $z - \frac{2}{3}z^2 = -\frac{2}{3}$. Моннан $z_1 = -\frac{1}{2}$, $z_2 = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow lgx = -\frac{1}{2}$; $lgx = 2$.

Җавап. $x_1 = 10^{-\frac{1}{2}}$, $x_2 = 100$.

Күнегүләр

1. $x^{\frac{lgx+5}{3}} = 10^{5+lgx}$.

2. $4^{log_4 x-2} = 2^{3(log_4 x-1)}$.

3. $x^{lgx} = 1000x^2$.

4. $x^{2lg^2 x} = 10x^3$.

Җаваплар

1. $x_1 = 10^{-5}$; $x_2 = 10^3$.

2. $x_1 = 2$; $x_2 = 64$.

3. $x_1 = 10^3$; $x_2 = 0{,}1$.

4. $x_1 = 0{,}1$; $x_{2,3} = 10^{\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}}$.

4.13. Күрсәткечле-дәрәҗәле тигезләмәләр

$\left(f(x)\right)^{\varphi(x)} = \left(f(x)\right)^{\psi(x)}$ рәвешендәге тигезләмә түбәндәге системалар җыелмасы белән тигезкөчле:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ \varphi(x) = \psi(x) \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) = 1, \\ x \in D(\varphi) \cap D(\psi) \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) = 0, \\ \varphi(x) > 0, \\ \psi(x) > 0. \end{cases}$$

0 саны нуль һәм тискәре дәрәҗәдә мәгънәсез, соңгы система шуны исәпкә алып язылган.

Мисал. $\left(4x^2 - 8x + 3\right)^{\frac{x+2}{x+5}} = \left(4x^2 - 8x + 3\right)^{\frac{x-2}{x+3}}$.

Чишү. Бирелгән тигезләмә түбәндәге тигезләмәләр җыелмасы белән тигезкөчле:

$$\begin{cases} 4x^2 - 8x + 3 > 0, \\ 4x^2 - 8x + 3 \neq 1, \\ \frac{x+2}{x+5} = \frac{x-2}{x+3} \end{cases} \Rightarrow x = -8, \quad \begin{cases} 4x^2 - 8x + 3 = 0, \\ \frac{x+2}{x+5} > 0,\ \frac{x-2}{x+3} > 0 \end{cases} \Rightarrow \varnothing.$$

$$\begin{cases} 4x^2 - 8x + 3 = 1, \\ x \neq -5,\ x = -3 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Җавап. $x_1 = -8;\ x_{2,3} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Искәрмә. $\left(f(x)\right)^{\varphi(x)} = 1$ рәвешле тигезләмә ике система җыелмасы белән тигезкөчле:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ \varphi(x) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) = 1, \\ x \in D(\varphi). \end{cases}$$

Мисал. $\left(2^x - 2 \cdot 2^{-x}\right)^{\log_9(2x+3) - \log_3 x} = 1.$

Чишү. Бу тигезләмә түбәндәге җыелмаларга эквивалент:

$$\begin{cases} 2^x - 2 \cdot 2^{-x} > 0, \\ 2^x - 2 \cdot 2^{-x} \neq 1, \\ \log_9(2x + 3) - \log_3 x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2^x - 2 \cdot 2^{-x} = 1, \\ 2x + 3 > 0, \\ x > 0 \end{cases}$$

Беренче системадан $x_1 = 3$, икенчесеннән — $x_2 = 1$ тамырларын табабыз.

Җавап. $x_1 = 3;\ x_2 = 1.$

Күнегүләр

1. $\left(x^2 + x + 1\right)^{x+5/(x+2)} = \left(x^2 + x + 1\right)^3.$

2. $\left(x^2 - x - 1\right)^{x^2-1} = 1.$

3. $a^{2\lg x - \lg(6-x)} = 1.$

4. $\sqrt[4]{|x - 3|^{x+1}} = \sqrt[3]{|x - 3|^{x-2}}.$

5. $|x - 1|^{\lg^2 x - \lg x^2} = |x - 1|^3.$

Җаваплар

1. $x_1 = -1;\ x_2 = -\frac{1}{2};\ x_3 = 0.$

2. $x_1 = -1;\ x_2 = 2.$

3. $a > 0$; $a \neq 1$ булса, $x = 2$; $a = 1$ булса, $x \in (0; 6)$.

4. $x_1 = 3$; $x_2 = 4$; $x_3 = 2$; $x_4 = 11$.

5. $x_1 = 2$; $x_2 = 1/10$; $x_3 = 1000$.

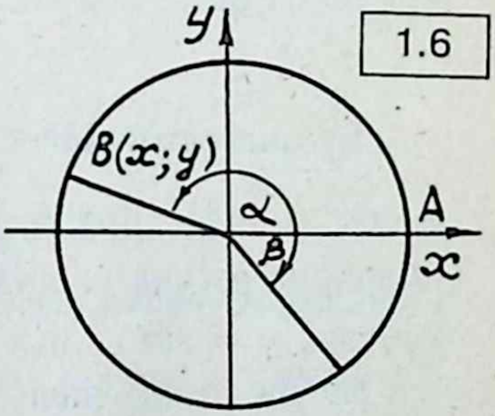
5. ТРИГОНОМЕТРИК ТИГЕЗЛӘМӘЛӘР

Үзгәрешле зурлык тригонометрик функция тамгасы астында булган тигезләмә **тригонометрик тигезләмә** дип атала. Тригонометрик тигезләмәнең я тамырлары юк, я алар чиксез күп.

Тригонометрик тигезләмәләрне чишкәндә, тригонометрик формулаларны ныклы белү кирәк.

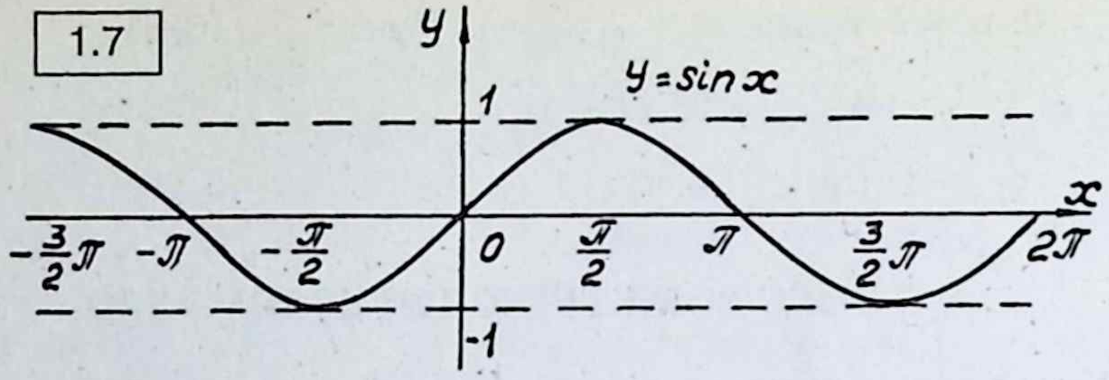
5.1. Төп тригонометрик функцияләр

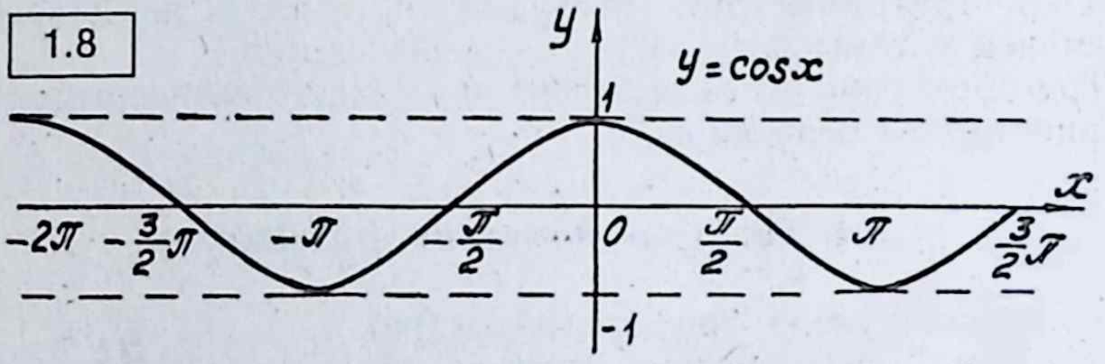
Тригонометриядә төп тригонометрик функцияләр "тригонометрик түгәрәк" ярдәмендә чыгарылалар. Үзәге координатлар башлангычында булган ирекле радиуслы әйләнә алыйк (1.6 рәс.).



Тригонометрик функцияләрнең билгеләмәләре әйләнәнең радиусына бәйле булганлыктан, радиус озынлыгын берәмлеккә тигез дип алалар. Бу вакытта әйләнәнең тигезләмәсе $x^2 + y^2 = 1$ рәвешле була. Теләсә нинди почмакны, аның зурлык тамгасына бәйле рәвештә, тригонометрик түгәрәккә x күчәреннән уңай яки тискәре юнәлештә салабыз (сәгать теле юнәлешенә тиңдәш рәвештә) (1.6 рәс.). Шулай итеп, түгәрәктәге почмакның бер ягы һәрвакыт хәрәкәтсез горизонталь радиусы AO белән тәңгәл килә, һәм ул почмакның *башлангыч ягы* дип атала. Почмакның икенче ягы OB радиусын тәшкил итә, һәм ул *күчмә радиус* дип атала. Теләсә нинди α санына күчмә радиусның берданбер торышы тиңдәш була, һәм бу радиус хәрәкәтсез радиус белән зурлыгы α радиан булган почмак ясый. Киресенчә, күчмә радиусның һәр торышына $\alpha + 2\pi n \left(n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots\right)$ рәвешле бик күп реаль саннар тиңдәш була. Бу саннар — почмакның зурлыгы, күчмә радиусның бирелгән торышы белән билгеләнәләр, ә α — бу почмакларның берсенең зурлыгы.

Әйтик, α — ниндидер почмак һәм OB — бу почмакка тиңдәш күчмә радиус булсын. Әгәр x һәм y B ноктасының координатлары булса, шуннан файдаланып, тригонометрик функцияләрнең билгеләмәләрен языйк: $\sin\alpha = y$; $\cos\alpha = x$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}(x \neq 0)$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}(y \neq 0)$.



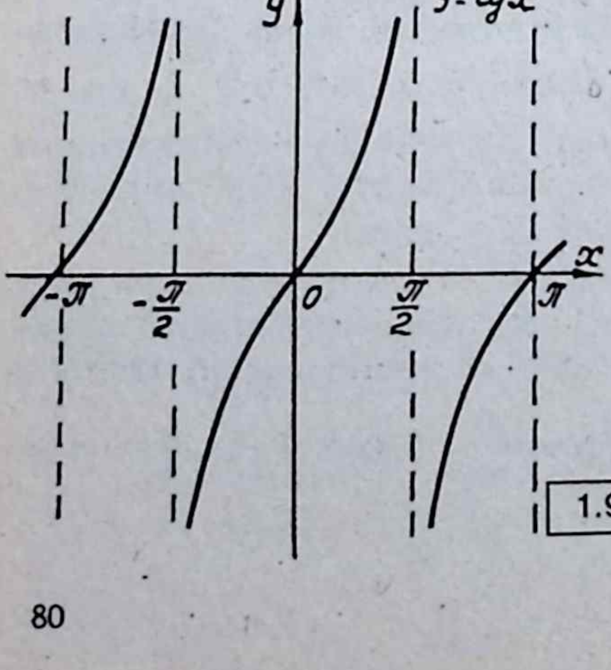


Бу билгеләмәләрнең нәтиҗәләре: $|\sin\alpha| \le 1$; $|\cos\alpha| \le 1$; $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\text{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Әгәр тригонометрик функцияләрне язганда аргумент һәм функцияләрнең элекке тамгаларына күчсәк, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \text{tg}x$, $y = \text{ctg}x$ дип яза алабыз.

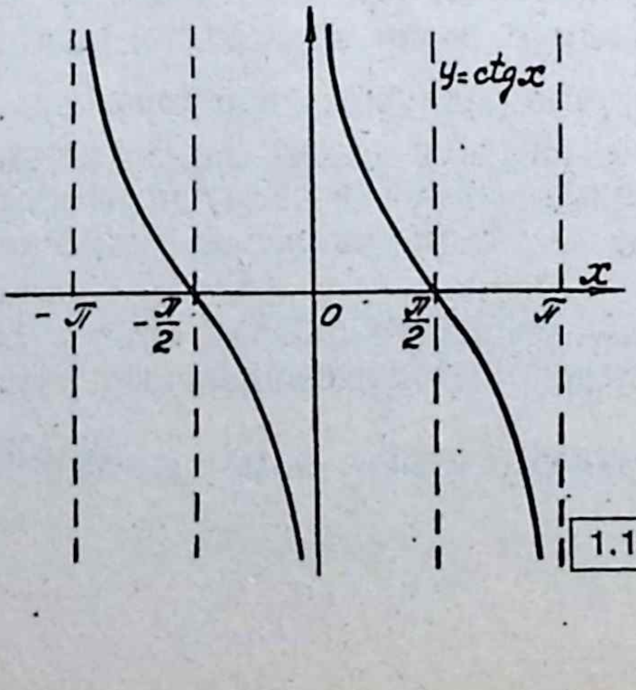
Бу функцияләрнең графиклары 1.7—1.10 рәсемнәрендә китерелгән.

5.2. Китерү формулалары

Китерү формулалары дип аргументлары $\frac{\pi}{2}k\,(k \in Z)$ зурлыгына α яки $-\alpha$ ны кушудан килеп чыккан тригонометрик функцияләрнең кыйммәтләрен $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\text{tg}\alpha$, $\text{ctg}\alpha$ аша күрсәтүче фор-



1.9



1.10

мулалар атала. Монда $k = 1, 2, 3$ кә тигез дип чикләнергә була, чөнки 2π һәр тригонометрик функция өчен *период* булып тора.

Формулаларны истә калдыру өчен түбәндәге мнемоник кагыйдәдән файдаланырга мөмкин:

1. Әгәр аргументның кыйммәте $(\pi \pm \alpha)$ га тигез булса, функциянең исеме саклана, әгәр дә аргументның кыйммәте $\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$ яки $\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right)$ га тигез булса, функция кофункция белән алыштырыла, ягъни синусның, косинусның, тангенсның, котангенсның исемнәре тиңдәшле рәвештә косинуска, синуска, котангенска, тангенска алыштырыла.

2. $\alpha \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ дип, кыйммәте $\frac{\pi}{2}k \pm \alpha$ га тигез булган почмакның кайсы чиректә ятканын ачыклыйлар, аннан соң бирелгән функциянең бу чиректәге тамгасын аныклап, шул тамганы ахыргы нәтиҗә алдына куялар.

Мисаллар. а) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$ ны гадиләштерегез.

Чишү. Монда косинус аргументының кыйммәте $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ га тигез, шуның өчен косинус функциясе синус функциясенә алыштырыла. $\alpha \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$, шуңа күрә почмак $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ өченче чиректә ята. Косинус өченче чиректә тискәре, димәк, нәтиҗәдәге $\sin\alpha$ алдына минус тамгасын куябыз.

Җавап. $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha$.

б) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ ны гадиләштерегез.

Чишү. Тангенсның исеме котангенска алыштырыла, нәтиҗәдә $\operatorname{ctg}\alpha$ алдына плюс тамгасы куела, чөнки $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$, ә тангенс беренче чиректә уңай.

Җавап. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha$.

в) $\sin(\pi + \alpha)$ не гадиләштерегез.

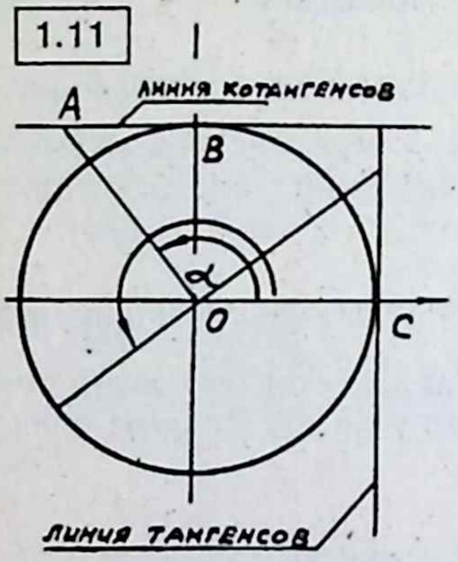
Чишү. Функциянең исеме саклана. $\pi + \alpha$ почмагы өченче чиректә ята, анда синус тискәре, димәк, нәтиҗә алдына минус тамгасы куела.

Җавап. $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$.

Искәрмә. Мнемоник кагыйдәдә α почмагы кысынкы дип саналса да, чынбарлыкта, китерү формулалары теләсә нинди почмак өчен дә шулай ук була. Бу фикер я теләсә нинди почмаклар өчен дөрес булган кушу формулалары, я тригонометрик түгәрәкне файдаланып, геометрик юл белән раслана.

Мисал. $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ дип алып, $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\mathrm{ctg}\alpha$ икәнен исбатларга.

1.11



Исбатлауны тангенс һәм котангенс сызыкларын файдаланып үткәрәбез (1.11 рәс.). $\Delta\, OCD$ тигез $\Delta\, OBA$, чөнки $|OC| = |OB|$, $A\hat{O}B = C\hat{O}D$, яклары үзара тигез булган почмаклар, димәк, $|AB| = |CD|$.

Ләкин $|AB| = -\mathrm{ctg}\alpha$; $|CD| = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$. Шуны исбатларга кирәк иде дә.

5.3. Иң гади тригонометрик тигезләмәләрне чишү

$\sin x = a$, $\cos x = b$, $\mathrm{tg}x = c$, $\mathrm{ctg}x = d$ рәвешендәге тигезләмәләр иң гади тригонометрик тигезләмәләр дип аталалар.

$\sin x = a$ тигезләмәсенең $|a| > 1$ булганда чишелеше юк, чөнки $-1 \le \sin x \le 1$, $a = 1$ булганда, бу тигезләмә $\sin x = 1$ рәвешен ала һәм аның чишелеше $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$ рәвешендә языла; $a = -1$ булганда, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$; $|a| < 1$ булганда, аның чишелеше $x = (-1)^k \mathit{arc}\sin a + \pi k$, $k \in Z$ рәвешендә бирелә. (Монда Z — бөтен саннар күплеге.) Әгәр $a = 0$ булса, $x = \pi k$ $(k \in Z)$.

$\cos x = b$ тигезләмәсенең чишелеше $|b| \le 1$ булганда, $x = \pm\, \mathit{arc}\cos b + 2k\pi$ $(k \in Z)$ рәвешендә языла. Әгәр $|b| > 1$ булса, тигезләмәнең чишелеше юк.

$\mathrm{tg}x = c$ тигезләмәсенең чишелеше теләсә нинди c өчен $x = \mathit{arc}\,\mathrm{tg}c + k\pi$ $(k \in Z)$ рәвешендә языла.

$\mathrm{ctg}x = d$ рәвешле тигезләмәнең чишелеше теләсә нинди d өчен

$x = arc\,\mathrm{ctg}d + k\pi \quad (k \in Z)$ рәвешендә языла.

Югарыда күренгәнчә, тригонометрик тигезләмәләрне чишкәндә, кире тригонометрик функцияләрнең билгеләреннән файдаланалар. Билгеле булганча, әгәр:

1) $\sin\alpha = a$ һәм 2) $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ шартлары үтәлсә, $ars\sin a = \alpha$ дип яза алабыз.

Шулай ук, әгәр $\begin{cases}\cos\alpha = a, \\ 0 \le \alpha \le \pi\end{cases}$ булса, $\alpha = ars\cos a$,

әгәр $\begin{cases}\mathrm{tg}\alpha = a, \\ -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le -\frac{\pi}{2}\end{cases}$ булса, $\alpha = ars\,\mathrm{tg}a$,

әгәр $\begin{cases}\mathrm{ctg}\alpha = a, \\ 0 < \alpha < \pi\end{cases}$ булса, $\alpha = ars\,\mathrm{ctg}a$.

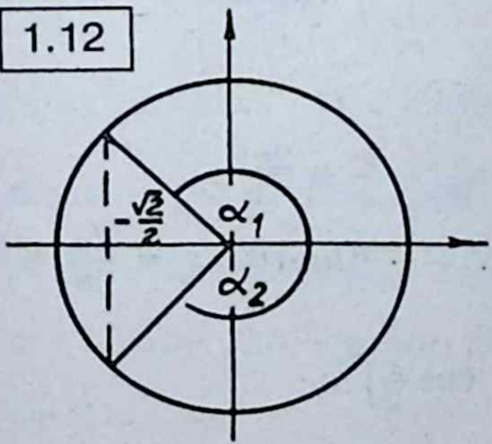
Мисаллар. Тигезләмәләрне чишегез: а) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Чишү. $\cos x = b$ тигезләмәсенең чишелеше формуласын кулланып табабыз: $x = \pm arc\cos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2k\pi$. $\alpha = arc\cos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ почмагының кыйммәтен хисапласак, җавапны тулай язарга була.

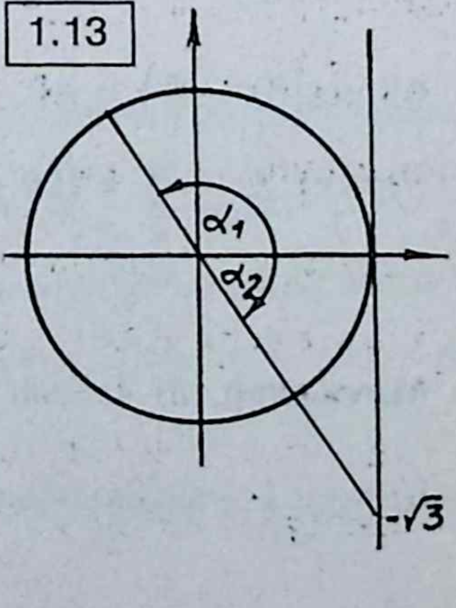
1.12 рәсеменнән күренгәнчә, $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ләкин α_2 почмагы $\alpha \in [0, \pi]$ шартын канәгатьләндерми, димәк, $\alpha = \alpha_1 = \frac{3\pi}{4}$.

Җавап. $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$.

1.12



1.13



б) $\mathrm{tg}\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$

Чишү. $\mathrm{tg}x = c$ тигезләмәсенең чишелеше формуласын кулланып табабыз: $3x - \frac{\pi}{6} = arc\,\mathrm{tg}(-3) + \pi k$.

1.13 рәсеменнән күренгәнчә, $arc\,\mathrm{ctg}\left(\sqrt{-3}\right) = \alpha_2 = -\frac{\pi}{3}$. Шуның өчен $3x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + \pi k \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + \pi k \Leftrightarrow 3x = -\frac{\pi}{6} + \pi k \Rightarrow x =$ $= -\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}$.

Җавап. $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}$.

Искәрмә. Әгәр иң гади тригонометрик тигезләмәләрдә $a = 0$, $a = \pm 1$, $b = 0$, $b = \pm 1$ булса, гомуми формулалар урынына түбәндәге гади формулаларны куллану уңайлы. Ул формулалар турыдан-туры тригонометрик түгәрәктән килеп чыга:

$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi k$	$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$
$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$	$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi k$
$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$	$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = (2k+1)\pi$

Мисаллар. а) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

Чишү. $2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$.

Җавап. $x = \frac{\pi}{8} + \pi k$.

б) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -1$.

Чишү. $3x - \frac{\pi}{6} = (2k+1)\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}$.

Җавап. $x = \frac{7\pi}{18} + \frac{2\pi}{3}k$.

Мисаллар. а) $1 - \sin 3x = \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2$.

Чишү. $1 - \sin 3x = \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 1 - \sin x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin 3x - \sin x = 0 \Leftrightarrow 2\sin x \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0,\\ \cos 2x = 0\end{array}\right. \Rightarrow x_1 = \pi k_1,$$

$2x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi k_2$.

Җавап. $x_1 = \pi k_1$;

$x_2 = \frac{\pi}{4}(1 + 2\pi k_2)$.

б) $\sin 2x(1 + \cos 4x) = \cos^2 2x$.

Чишү. $1 + \cos 4x = 2\cos^2 2x$ бердәйлеген кулланып, бу тигезләмәне түбәндәге рәвештә язабыз: $2\sin 2x \cos^2 2x = \cos^2 2x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \cos^2 2x(2\sin 2x - 1) = 0$.

Табылган тигезләмә ике тигезләмә җыелмасына тамырдаш:

$$\left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0,\\ \sin 2x = \frac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Беренче тигезләмәнең чишелеше: $2x = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$.

Икенче тигезләмәнең чишелеше: $2x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi$.

Җавап. $x_1 = \frac{\pi}{4}(2k + 1)$;

$x_2 = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$.

в) $\frac{1}{1+\cos^2 x} + \frac{1}{1+\sin^2 x} = \frac{16}{11}$.

Чишү. $\frac{1+\sin^2 x+1+\cos^2 x}{(1+\cos^2 x)(1+\sin^2 x)} = \frac{3}{2+\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{16}{11} \Leftrightarrow 2 + \sin^2 x \cos^2 x =$ $= \frac{33}{16} \Leftrightarrow \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{16}$.

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$ бердәйлеген файдаланып, соңгы тигезләмәнең рәвешен үзгәртәбез: $\frac{1}{4}\sin^2 2x = 1\frac{1}{6} \Leftrightarrow \sin^2 2x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin^2 2x = \left(\frac{1}{2}\right)^2$. $\sin x = \pm a$ тигезләмәләре табылды. Димәк, чишелешләр күплеге түбәндәге формула белән билгеләнә: $2x = \pm ars\sin\frac{1}{2} + \pi k$ яки $2x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$.

Җавап. $x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$.

г) $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x = 1/16$.

Чишү. Тигезләмәнең ике ягын да $\sin x$ ка тапкырлап, түбәндәге тигезләмәгә күчәбез: $\sin x \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{1}{16}\sin x$. Бу тигезләмә баштагы тигезләмәгә тамырдаш, чөнки $x \neq \pi k$ (πk — бирелгән тигезләмәнең тамыры түгел). $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ бердәйлеген кулланып, соңгы тигезләмәнең сул ягын үзгәртәбез:

$$\frac{1}{2}\sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x = \frac{1}{4}\sin 4x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x = \frac{1}{8}\sin 8x \cdot \cos 8x =$$

$$= \frac{1}{16}\sin 16x = \frac{1}{16}\sin x \Rightarrow 16x - x = 2\pi k_1;\quad 16x + x = \pi(1+2k_2),\quad k_1,\ k_2 \in Z.$$

Моннан $x_1 = 2\pi k_1/15$, $x_2 = \frac{\pi}{17}(1 + 2k_2)$. Бу күплектән $x_1 = x_2 = \pi k$ га тигез булган x_1 һәм x_2 не алып ташлау кирәк. Беренче шарттан k_1 нең $\frac{2\pi}{15}k_1 = \pi k$ яки $2k_1 = 15k$ булган кыйммәтләрен алып ташлыйбыз. $k \in Z$ булганлыктан, $\frac{2k_1}{15}$ дә — бөтен сан. Моның фәкать $k_1 = 15n$, $n \in Z$ булганда гына булуы мөмкин. Икенче шарттан k_2 нең $\frac{\pi}{17}(1 + 2k_2) = k\pi$ яки $\frac{1+2k_2}{17} = k$ булган кыйммәтләрен алып ташлау кирәк. $k_2 = 17m + l$ дип алып (монда $m \in Z$, $l = 0; 1; 2; \ldots; 16$), табабыз: $k = \frac{1+2(17m+l)}{17} = 2m + \frac{2l+1}{17}$.

$l = 8$ булганда, k бөтен сан була, димәк, $k_2 = 17m + 8$ булганда, x_2 нең кыйммәтләре МТӨ нә керми. Шулай итеп, тигезләмәнең барлык чишелешләре түбәндәге формулалар белән бирелә:

$$x_1 = \frac{2\pi}{15}k_1,\ k_1 \neq 15n;\quad x_2 = \frac{\pi}{17}(1 + 2k_2),\ k_2 \neq 17m + 8.$$

Җавап. $x_1 = \frac{2\pi}{15}k_1,\ k_1 \neq 15n;$
$x_2 = \frac{\pi}{17}(1 + 2k_2),\ k_2 \neq 17m + 8$.

Күнегүләр

1. $\sin 2x = \cos^4\frac{x}{2} - \sin^4\frac{x}{2}$.

2. $1 + \sin 2x = (\cos 3x + \sin 3x)^2$.

3. $(1 - \cos x)/\sin\frac{x}{2} = 2$.

4. $(\cos 6x - 1)\operatorname{ctg} 3x = \sin 3x$.

5. $\cos 4x + 2\cos^2 x = 1$.

6. $2\cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \sin 3x$.

7. $\sin 2x + \sqrt{3} - 2\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$.

8. $\sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$.

9. $\mathrm{tg}^3 3x - 2\sin^3 3x = 0$.

10. $2\mathrm{tg}x \cos x + 1 = 2\cos x + \mathrm{tg}x$.

11. $\cos^4 \frac{x}{5} + \sin^2 \frac{x}{5} = 1$.

12. $\cos^3 x + \cos^2 x - 4\cos^2 \frac{x}{2} = 0$.

Җаваплар

1. $x_1 = \frac{\pi}{2}(1 + 2k)$; $x_2 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$.

2. $x_1 = \frac{\pi k}{2}$; $x_2 = \frac{\pi}{8}(1 + 2k)$.

3. $x = \pi(1 + 4k)$.

4. $x = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}$.

5. $x = \frac{\pi}{6}(1 + 2k)$.

6. $x_1 = \frac{\pi}{8}(1 + 4k)$; $x_2 = \frac{\pi}{4}(1 + 4k)$.

7. $x_{1,2} = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $x_3 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

8. $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$.

9. $x_1 = \frac{\pi n}{3}$; $x_{2,3} = \pm\frac{1}{3} ars\cos\frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{2\pi k}{3}$.

10. $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k$; $x_{2,3} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$.

11. $x_1 = \pi/2 + \pi(5k + 2)$; $x_2 = 5\pi k$.

12. $x = \pi(2k + 1)$.

5.4. Тригонометрик суммаларны тапкырчыгышка үзгәртеп чишелә торган тигезләмәләр

Монда түбәндәге формулалар кулланыла:

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\pm\beta}{2}; \quad \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}; \qquad \operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Мисаллар. а) $\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0$.

Чишү. $(\cos 9x - \cos 7x) + (\cos 3x - \cos x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2\sin x\sin 8x - 2\sin x\sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin x(\sin 8x + \sin 2x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\sin 5x\cos 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0,\\ \sin 5x = 0,\\ \cos 3x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 5x = 0,\\ \cos 3x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi k}{5};\ x_2 = \frac{\pi}{6}(1+2k).$

Җавап. $x_1 = \frac{\pi k}{5};\ x_2 = \frac{\pi}{6}(1+2k)$.

б) $1 + \sin x - \cos 5x - \sin 7x = 2\cos^2\frac{3}{2}x$.

Чишү. $1 + \sin x - \cos 5x - \sin 7x = 1 + \cos 3x \Leftrightarrow \sin x - \sin 7x =$
$= \cos 5x + \cos 3x \Leftrightarrow -2\sin 3x\cos 4x = 2\cos 4x\cos x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos 4x(\cos x + \sin 3x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 4x = 0,\\ \cos x = -\sin 3x.\end{array}\right.$$

Беренче тигезләмәдән килеп чыга:

$$4x = \frac{\pi}{2}(1+2k) \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{8}(2k+1).$$

Икенче тигезләмәнең рәвешен үзгәртәбез: $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \pm \left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) = 2\pi k \Rightarrow x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ x_3 = \frac{\pi}{8}(4k-1)$. x_3 күплеге x_1 күплегенә керә.

Җавап. $x_1 = \frac{\pi}{8}(2k+1);\ x_2 = \frac{\pi}{4}(4k-1)$.

в) $\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}2x - \operatorname{tg}3x = 0$.

Чишү. МТӨ: $x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1);\ x \neq \frac{\pi}{4}(1+2k);\ x \neq \frac{\pi}{6}(1+2k)$.

Кушылучыларны группалау юлы белән табабыз:

$$(\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}2x) - \operatorname{tg}3x = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin 3x}{\cos x\cos 2x} - \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x\left(\frac{1}{\cos x\cos 2x}-\frac{1}{\cos 3x}\right)=0 \Leftrightarrow \sin 3x=0,\ \cos 3x=\cos x\cos 2x.$$

Беренче тигезләмәне чишәбез: $3x=\pi k \rightarrow x_1=\frac{\pi k}{3}$. Икенче тигезләмәнең рәвешен кушу формуласы буенча үзгәртәбез:

$$\cos(2x+x)=\cos 2x\cos x \Leftrightarrow \cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x=\cos 2x\cos x \Leftrightarrow$$

$$\sin x\cdot\sin 2x=0 \Rightarrow x_2=\pi k;\ \ x_3=\frac{\pi k}{2}.$$

x_2 күплеге x_1 күплегенә керә. Саны җөп булганда, x_3 кыйммәтләре x_2 күплегенә керә, ә саны так булганда, МТӨ керми.

Җавап. $x=\frac{\pi k}{3}$.

г) $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+x\right)=\sin x+\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-x\right)$.

Чишү. $\frac{1}{2}\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)-1+\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)\right)=\sin x \Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{4}\times$ $\times\sin 2x=\sin x \Leftrightarrow \sin x\left(\sqrt{2}\cos x-1\right)=0$.

Бу тигезләмә ике тигезләмәдән торган җыелмага тамырдаш:

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{array}\right.$$

Җавап. $x_1=\pi k;\ \ x_2=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi$.

Күнегүләр

1. $\sin(15^\circ+x)+\sin(45^\circ-x)=1$.

2. $\sin 2x+\sin(\pi-8x)=\sqrt{2}\cos 3x$.

3. $\sin x+\sin 7x-\cos 5x+\cos(3x-2\pi)=0$.

4. $\sin 7x+\sin 9x=2\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)\right)$.

5. $\sqrt{3}-\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$.

6. $\cos x-\sqrt{3}\sin x=\cos 3x$.

7. $\cos x-\cos 3x=2\sqrt{3}\sin^2 x$.

8. $\cos x-\cos 2x=\sin 3x$.

9. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$.

10. $\sin 7x+\cos^2 2x=\sin^2 2x+\sin x$.

11. $\cos 2x - \sin 3x - \cos 8x = \sin 10x - \cos 5x$.

12. $5\sin x + 6\sin 2x + 5\sin 3x + \sin 4x = 0$.

Җаваплар

1. $x = 15° + 360°k$.

2. $x_1 = \frac{\pi}{6}(1 + 2k)$; $x_2 = (-1)^k \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}$.

3. $x_1 = \pi k/4$; $x_2 = \frac{\pi}{8}(3 + 4k)$.

4. $x_1 = \frac{\pi}{2}(1 + 2k)$; $x_2 = \frac{\pi}{11}(1 + 2k)$; $x_3 = \frac{2\pi k}{5}$.

5. $x_1 = \pi k$; $x_2 = \frac{\pi}{3}(1 + 3k)$.

6. $x_1 = \pi k$; $x_2 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$.

7. $x_1 = \pi k$; $x_2 = \pm\pi/6 + 2\pi k$.

8. $x_1 = 2\pi k/3$; $x_2 = \pi/4 + \pi k$; $x_3 = -\pi/2 + 2\pi k$.

9. $x_1 = 2\pi k/3$; $x_2 = \pi/2 + \pi k$; $x_3 = \pi + 2\pi k$.

10. $x_1 = \pi/8 + \pi k/4$; $x_2 = (-1)^{k+1}\pi/18 + \pi k/3$.

11. $x_1 = (-1)^k \pi/30 + \pi k/5$; $x_2 = \pi/16 + \pi k/4$; $x_3 = 3\pi/4 + \pi k$.

12. $x_1 = \pi k/2$; $x_{2,3} = \pm 2\pi/3 + 2\pi k$.

5.5. Тригонометрик тапкырчыгышларны суммаларга үзгәртеп чишелә торган тигезләмәләр

Монда түбәндәге формулалар кулланыла:

$$\sin\alpha\cos\beta = 1/2\left(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\right);$$

$$\cos\alpha\cos\beta = 1/2\left(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\right);$$

$$\sin\alpha\sin\beta = 1/2\left(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right).$$

Мисал. $\sin(7x/2)\cos(3x/2) + \sin(x/2)\cos(5x/2) + \sin 2x\cos 7x = 0$.

Чишү. $\frac{1}{2}(\sin 5x + \sin 2x) + \frac{1}{2}(\sin 3x - \sin 2x) + \frac{1}{2}(\sin 9x - \sin 5x) =$

$= 0 \Leftrightarrow \sin 3x + \sin 9x = 0 \Leftrightarrow \sin 3x = \sin(-9x) \Leftrightarrow 12x = 2\pi k;$

$6x = \pi(1 + 2k) \Rightarrow x_1 = \frac{\pi k}{6}; \; x_2 = \frac{\pi}{6}(1 + 2k).$

x_2 нең кыйммәтләре күплеге x_1 кыйммәтләре күплегенә керә.

Җавап. $x = \frac{\pi k}{6}.$

Күнегүләр

1. $\sin x \cos 2x + \cos x \cos 4x = \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right).$

2. $\cos x \cos 2x = \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + 4x\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4} + 4x\right)\cos\left(\frac{7\pi}{4} - 5x\right)$

3. $\sin 2x \sin 6x = \cos x \cos 3x.$

4. $\sin\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - 6x\right).$

5. $\sin\left(\pi x + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\pi x - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}.$

Җаваплар

1. $x = \frac{\pi}{12}(4k - 1).$ 2. $x_1 = \frac{\pi}{14}(1 + 2k); \; x_2 = \frac{\pi k}{2}.$

3. $x_1 = \frac{\pi}{10}(1 + 2k); \; x_2 = \frac{\pi}{6}(1 + 2k).$

4. $x = \pi k/4.$ 5. $x_1 = k - \frac{5}{12}; \; x_2 = k + \frac{1}{4}.$

5.6. Почмаклар суммасы һәм аермасы формулаларын кулланып чишелә торган тигезләмәләр

Бу тигезләмәләр түбәндәге формулаларны кулланып чишеләләр:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}; \quad \mathrm{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{ctg}\alpha\,\mathrm{ctg}\beta \mp 1}{\mathrm{ctg}\alpha \pm \mathrm{ctg}\beta}.$$

Кушу формулаларының нәтиҗәләре: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha; \; \mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}; \; \mathrm{ctg}2\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{2\mathrm{ctg}\alpha}.$$

Мисаллар. а) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)\mathrm{ctg}3x + \sin(\pi + 2x) - \sqrt{2}\cos 5x = 0.$

Чишү. МТӨ: $3x \neq \pi k \Rightarrow x \neq \frac{\pi k}{3}$. Димәк, $\sin 3x \neq 0$.

Тигезләмәнең ике ягын да $\sin 3x$ ка тапкырлап, эквивалент тигезләмә табабыз: $\cos 2x \cos 3x - \sin 2x \sin 3x - \sqrt{2}\cos 5x \sin 3x = 0$. Кушу формуласы буенча алдагы ике кушылучының рәвешен үзгәртәбез: $\cos 5x - \sqrt{2}\cos 5x \sin 3x = 0 \Leftrightarrow \cos 5x\left(1 - \sqrt{2}\sin 3x\right) = 0 \Leftrightarrow \cos 5x = 0;$ $\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 5x = \frac{\pi}{2}(2k+1);\ \ 3x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k.$

Җавап: $x_1 = \frac{\pi}{10}(2k+1);$

$x_2 = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}.$

б) $2(\cos 4x - \sin x \cos 3x) = \sin 4x + \sin 2x.$

Чишү. Тигезләмәнең уң ягын тригонометрик функцияләрнең суммасы формуласын кулланып үзгәртәбез: $2\cos 4x - 2\sin x \cos 3x = 2\sin 3x \cos x \Leftrightarrow \cos 4x = \sin x \cos 3x + \sin 3x \cos x$. Тигезләмәнең уң ягына кушу формуласын кулланабыз: $\cos 4x = \sin(x + 3x) \Leftrightarrow \Leftrightarrow \cos 4x = \sin 4x \Leftrightarrow \mathrm{tg}4x = 1 \Leftrightarrow 4x \frac{\pi}{4} + k\pi.$

Җавап. $x = \frac{\pi}{16}(1 + 4k).$

в) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) - \sin(\pi - 5x) = \sqrt{3}(\cos 5x - \sin 3x).$

Чишү. $\cos 3x - \sin 5x = \sqrt{3}\cos 5x - \sqrt{3}\sin 3x \Leftrightarrow \cos 3x + \sqrt{3}\sin 3x = \sqrt{3}\cos 5x + \sin 5x$.

Соңгы тигезләмәнең ике ягын да 1/2 гә тапкырлыйбыз, баштагы тигезләмәгә тамырдаш тигезләмә табыла: $\frac{1}{2}\cos 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x + \frac{1}{2}\sin 5x \Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{6}\cos 3x + \cos\frac{\pi}{6}\sin 3x = \sin\frac{\pi}{3}\cos 5x +$$

$$+ \cos\frac{\pi}{3}\sin 5x \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6} + 3x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + 5x\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x + \frac{\pi}{3} + 3x + \frac{\pi}{6} = \pi(1 + 2k), \\ 5x + \frac{\pi}{3} - 3x - \frac{\pi}{6} = 2\pi k. \end{array}\right.$$

Җавап. $x_1 = \frac{\pi}{12}(12k - 1);\ \ x_2 = \frac{\pi}{16}(1 + 4k).$

Күнегүләр

1. $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin 2x = \sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}$.

2. $\operatorname{tg}2x\cos 3x + \sin 3x + \sqrt{2}\sin 5x = 0$.

3. $\sin 2x\sin 6x - \cos 2x\cos 6x = \sqrt{2}\sin 3x\cos 8x$.

4. $\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{ctg}\frac{3x}{2} + \sec\frac{x}{2}\operatorname{cosec}\frac{3x}{2} = 1$.

5. $\sin 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 5x + \frac{1}{2}\cos 5x = 0$.

6. $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sec\frac{7\pi}{6}$.

7. $\frac{\operatorname{tg}2x + \operatorname{tg}x}{1 - \operatorname{tg}x\operatorname{tg}2x} = -1$.

8. $2\operatorname{tg}3x - 3\operatorname{tg}2x = \operatorname{tg}^2 2x\operatorname{tg}3x$.

Җаваплар

1. $x_1 = \pi k$; $x_2 = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$.
2. $x_1 = \frac{\pi k}{5}$; $x_2 = \pm\frac{3\pi}{8} + \pi k$.
3. $x_1 = \frac{\pi}{16}(1 + 2k)$; $x_2 = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$.
4. $x = \frac{\pi}{2}(1 + 4k)$.
5. $x_1 = \frac{5\pi}{12} + \pi k$; $x_2 = -\frac{\pi}{48} + \frac{\pi k}{4}$.
6. $x = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}$.
7. $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$.
8. $x = \pi k$.

5.7. Дәрәҗәне төшерү формулаларын куллануга чишелә торган тигезләмәләр

Бу очракта мондый формулалар кулланыла:

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha);\quad \sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha).$$

Мисаллар. а) $\cos^2 3x + \cos^2 4x + \cos^2 5x = \frac{3}{2}$.

Чишү. Тигезләмәнең сул ягын дәрәҗәне төшерү формулаларын кулланып үзгәртәбез: $\frac{1}{2}(1 + \cos 6x) + \frac{1 + \cos 8x}{2} + \frac{1 + \cos 10x}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos 6x + \cos 8x + \cos 10x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 8x \cos 2x + \cos 8x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos 8x = 0; \quad \cos 2x = -\frac{1}{2}.$

Җавап. $x_1 = \frac{\pi}{16}(2k+1);$

$x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k.$

б) $\sin 3x + \sin 5x = 2\left(\cos^2 2x - \sin^2 3x\right).$

Чишү. $\sin 3x + \sin 5x = 2\left(\frac{1+\cos 4x}{2} - \frac{1-\cos 6x}{2}\right) \Leftrightarrow \sin 3x + \sin 5x =$
$= \cos 4x + \cos 6x \Leftrightarrow 2\sin 4x \cos x = 2\cos 5x \cos x \Leftrightarrow \cos x = 0;$
$\sin 4x = \cos 5x.$

Җавап. $x_1 = \frac{\pi}{2}(1+2k);$

$x_2 = \frac{\pi}{18}(1+4k).$

Күнегүләр

1. $\sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 x + \sin^2 5x = 2.$

2. $\frac{1}{2}(\cos 5x + \cos 7x) - \cos^2 2x + \sin^2 3x = 0.$

3. $\cos^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{3x}{2} - \sin^2 2x - \sin^2 4x = 0.$

4. $\sin^2 3x + \sin^2 4x = \sin^2 5x + \sin^2 6x.$

5. $\sin 7x + \sin 9x = 2\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)\right).$

Җаваплар

1. $x_1 = \frac{\pi}{4}(1+2k); \quad x_2 = \frac{\pi}{14}(1+2k).$

2. $x_1 = \frac{\pi}{2}(1+2k); \quad x_2 = 2\pi k/11.$

3. $x_1 = \frac{\pi}{4}(1+2k); \quad x_2 = \frac{\pi}{5}(1+2k); \quad x_3 = \frac{\pi}{7}(1+2k).$

4. $x_1 = \frac{\pi k}{2}; \quad x_2 = \frac{\pi k}{9}.$

5. $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k; \quad x_2 = \frac{\pi}{11} + \frac{2\pi k}{11}; \quad x_3 = \frac{2\pi k}{5}.$

5.8. Өчләтелгән аргумент формулаларын кулланып чишелә торган тигезләмәләр

Бу очракта мондый формулалар кулланыла:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha; \quad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

Мисал. $\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x + 0{,}375 = 0.$

Чишү. Өчләтелгән аргумент формулаларын кулланып табабыз:

$$\sin^3 x\left(4\cos^3 x - 3\cos x\right) + \cos^3 x\left(3\sin x - 4\sin^3 x\right) + \frac{3}{8} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\cos^3 x \sin x - 3\sin^3 x \cos x = -\frac{3}{8} \Leftrightarrow \sin x\cos x \cdot \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) =$$

$$= -\frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x = -\frac{1}{8} \Leftrightarrow \sin 4x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 4x = (-1)^k\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi k.$$

Җавап. $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{4}.$

Күнегүләр

1. $\cos 3x = -2\cos x.$
2. $\cos 9x - 2\cos 6x = 2.$
3. $3\sin\frac{x}{3} = \sin x.$
4. $\sin 6x + 2 = 2\cos 4x.$
5. $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}x\right) = 2\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$

Җаваплар

1. $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k; \quad x_{2,3} = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k.$
2. $x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}; \quad x_{2,3} = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}.$
3. $x = 3\pi k.$
4. $x_1 = \frac{\pi k}{2}; \quad x_2 = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}.$
5. $x_1 = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k; \quad x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$

Теләсә нинди тригонометрик тигезләмәләрне чишәргә мөмкинлек бирә торган универсал ысул юк. Түбәндә иң гади тигезләмәләргә китерү мөмкинлекләре булган кайбер тигезләмәләрне карыйк. $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg}x$, $\operatorname{ctg}x$ белән рациональ бәйле булган функцияне $R(\sin x, \cos x, \operatorname{tg}x, \operatorname{ctg}x)$ аша тамгалыйк, ягъни бу функциянең аргументлары өстендә чикле санда кушу, алу, тапкырлау, бүлү гамәлләре генә эшләнә.

Мәсәлән, $\frac{7\sin^3 x - 10 + \cos^2 x + 2\cos x}{\sin x \cdot \cos x(2\sin^2 x + 5)}$ $\sin x$ һәм $\cos x$ ның рациональ функциясе була.

5.9. Универсаль алыштыру (алмаштыру)

$R(\sin nx, \cos mx, \operatorname{tg}kx, \operatorname{ctg}lx) = 0$ (R — күрсәтелгән аргументлардан рациональ функция; $n, m, к, l \in z$) рәвешле тригонометрик тигезләмә, тригонометрик функцияләрнең кушу формулаларын кулланып, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg}x$, $\operatorname{ctg}x$ ка карата рациональ тигезләмәгә күчә, соңыннан бу тригонометрик тигезләмәне $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ билгесезе өчен рациональ тигезләмәгә әверелдерергә була. $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ универсаль алыштыру дип атала. $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg}x$ һәм $\operatorname{ctg}x$ t аша түбәндәге формулалар белән бирелә: $\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$;

$\operatorname{tg}x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1-t^2}$; $\operatorname{ctg}x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{2t}$.

$x \neq \pi(1 + 2k)$ булганда гына бу универсаль алмаштыру формулаларының урынлы булуын истә тотарга кирәк, шуның өчен, тигезләмә чишкәндә, $x = \pi(2k + 1)$ нең тигезләмәнең тамыры булуын яки булмавын тикшерү кирәк.

Мисаллар. а) $3\sin 2x + \cos 2x + 1 = 0$.

Чишү. Әйтик, $2x \neq \pi(1 + 2k)$ шарты үтәлсен.

Универсаль алмаштыру формулаларын кулланып, тигезләмәнең рәвешен үзгәртәбез: $3\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2 x} + \frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} + 1 = 0$.

Бу тигезләмәне чишеп табабыз: $\operatorname{tg}x = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi k$.

Хәзер $2x = \pi(1 + 2k)$ тамырмы, юкмы икәнлеген тикшерү өчен

$2x$ ны тигезләмәгә куеп карыйбыз: $3\sin(\pi + 2\pi k) + \cos(\pi + 2\pi k) + 1 =$

$= 3 \cdot 0 - 1 + 1 = 0$. Димәк, $x = \frac{\pi}{2}(1 + 2k)$ тигезләмәнең тамыры була.

Җавап. $x_1 = -\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi k;$

$x_2 = \frac{\pi}{2}(1 + 2k)$.

б) $2\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1\right) = \cos x$.

Чишү. МТӨ: $x \neq \pi(1 + 2k)$. Универсаль алыштыру кулланып, тигезләмәнең рәвешен үзгәртәбез: $2(t - 1) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. x ның МТӨ эчендә бу тигезләмә баштагы тигезләмәгә тамырдаш. Гадиләштергәннән соң, тигезләмә түбәндәге рәвешкә керә:

$(t - 1)\left(2t^2 + t + 3\right) = 0$. Моннан $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t = 1$.

Җавап. $x = \frac{\pi}{2}(1 + 4k)$.

в) $2 + \operatorname{tg}x\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + \operatorname{ctg}x\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0$

Чишү. МТӨ: $x \neq \frac{\pi}{2}(1 + 2k)$; $x \neq \pi k \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi k}{2}$.

Әгәр $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ дип алмаштырсак, бирелгән тигезләмә түбәндәге рәвешкә килә: $2 + \frac{2t}{1-t^2} \cdot \frac{1}{t} + \frac{1-t^2}{2t} \cdot t = 0$. Моннан $t = \pm\sqrt{3}$ яки $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{3}$. Табабыз: $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$.

Башка тамырлар юк, чөнки универсаль алмаштыру бирелгән тигезләмәне тамырдаш тигезләмәгә алыштыра.

Җавап. $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$.

г) $\frac{\sin x}{1+\cos x} = 2 - \operatorname{ctg}x$.

Чишү. МТӨ: $x \neq \pi(2k + 1)$; $x \neq \pi k \Leftrightarrow x \neq \pi k$.

$\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ ны t га алыштырып, бирелгән тигезләмәне түбәндәге рәвешкә китерәбез: $\frac{2t}{1+t^2} : \left(1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) = 2 - \frac{1-t^2}{2t}$ яки $t^2 - 4t + 1 = 0$. Моннан $t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$. Димәк, $\operatorname{tg}\frac{x}{2} 2 = \pm\sqrt{3}$.

Җавап. $x_{1,2} = 2\operatorname{arctg}\left(2 \pm \sqrt{3}\right) + 2\pi k$.

Күнегүләр

1. $\frac{1}{\sqrt{3}-\operatorname{tg}x}-\frac{1}{\sqrt{3}+\operatorname{tg}x}=\sin 2x.$

2. $2\cos 2x+2\operatorname{tg}^2 x=5.$

3. $1+\cos x+\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0.$

4. $2+\sin x=3\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$

5. $\operatorname{tg}2x+\operatorname{ctg}x=4\sin 2x.$

Җаваплар

1. $x_1=\frac{\pi}{4}(1+2k);\ x_2=\pi k.$

2. $x=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1).$

3. $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k.$

4. $x=\frac{\pi}{2}(1+4k).$

5. $x_{1,2}=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k;\ x_3=\frac{\pi}{2}+\pi k.$

Искәрмә. Универсаль алмаштыру һәрвакыт урынлы булмый, чөнки бу алмаштыру еш кына тригонометрик тигезләмә чишүне югары дәрәҗәдәге күпбуынның тамырларын табу проблемасына китерә, ә бу — тагы да катлаулырак проблема. Шуның өчен, мөмкин булганда башка алмаштырулар кулланалар.

5.10. $\sin x=t$ һәм $\cos x=t$ алыштырмалары

Әгәр тригонометрик тигезләмәгә ($R(\sin x, \cos x)=0$) $\cos x$ җөп дәрәҗәдә генә керсә, $\cos^2 x$ ны $1-\sin^2 x$ белән алыштырып, билгесезе $\sin x=t$ булган рациональ тигезләмә алырга мөмкин. Шулай ук, әгәр $\sin x$ тигезләмәгә җөп дәрәҗәдә генә керсә, $\sin^2 x$ ны $1-\cos^2 x$ белән алыштырып, билгесезе $\cos x=t$ булган рациональ тигезләмә табып була.

Мисаллар. а) $6\sin^2 x+2\sin^2 2x=5.$

Чишү. Дәрәҗәне кимемү формуласы ярдәмендә тигезләмәне түбәндәге рәвешкә китерәбез: $6\,\frac{1-\cos 2x}{2}+2\sin^2 2x=5.$

Соңгы тигезләмәдә $\sin^2 2x$ ны $1-\cos^2 2x$ ка алыштырып, билгесезе $\cos 2x$ булган квадрат тигезләмә табабыз: $3-3\cos 2x+2-$ $-2\cos^2 2x=5$ яки $2\cos^2 2x+3\cos 2x=0$. Соңгы тигезләмәне чишеп, $\cos 2x=0$ һәм $\cos 2x=-\frac{3}{2}$ тигезләмәләрен табабыз. Икенче тигезләмәнең тамырлары юк, беренче тигезләмәнең тамырлары: $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$.

Җавап. $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$.

б) $\frac{4\text{ctg}x}{1+\text{ctg}^2 x} + \sin^2 2x = -1.$

Чишү. МТӨ: $x \neq \pi k$. $\frac{4\text{ctg}x}{1+\text{ctg}^2 x} = 4\text{ctg}x \sin^2 x = 2\sin 2x$ булганлыктан, бирелгән тигезләмә түбәндәге рәвешкә үзгәрә: $2\sin 2x + \sin^2 2x + 1 = 0$, моннан $\sin 2x = -1$.

Җавап. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$.

в) $2\sin^3 x - \cos 2x - \sin x = 0.$

Чишү. $2\sin^3 x - \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) - \sin x = 0$, $\cos^2 x$ ны $1 - \sin^2 x$ ка алыштырабыз, тигезләмәне билгесезе $\sin x$ булган тигезләмәгә китерәбез: $2\sin^3 x - 1 + 2\sin^2 x - \sin x = 0$, моннан $2\sin^2 x(\sin x + 1) - (\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow (\sin x + 1)\left(2\sin^2 x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \sin x = -1$, $\sin^2 x = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$.

Җавап. $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $x_2 = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k$.

Күнегүләр

1. $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0.$
2. $\cos 2x + \sin^2 x - \sin x = 0{,}25.$
3. $7 + 4\sin x\cos x + 1{,}5(\text{tg}x + \text{ctg}x) = 0.$
4. $\cos 4x + 2\sin^2 x = 0.$
5. $5(1 + \cos x) = 2 + \sin^4 x - \cos^4 x.$
6. $\cos^4 \frac{x}{5} + \sin^2 \frac{x}{5} = 1.$
7. $2\cos x\left(\cos - \sqrt{8}\,\text{tg}x\right) = 5.$
8. $4\cos x\left(2 - 3\sin^2 x\right) = -(1 + \cos 2x).$

Җаваплар

1. $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k.$
2. $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k.$
3. $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}.$

4. $x_1 = \frac{\pi}{4}(2k+1)$; $x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$.

5. $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$.

6. $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi(5k+2)$; $x_2 = 5\pi k$.

7. $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + \pi k$.

8. $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k$; $x_{2,3} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$; $x_{3,4} = \pm\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi k$.

5.11. $tgx = t$ һәм $ctgx = t$ алыштырмалары

Әгәр түбәндәге формулаларны кулланcак, $R\left(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x\right) = 0$ рәвешле тигезләмәләр билгесезе $t = \mathrm{tg}x (t = \mathrm{ctg}x)$ булган тигезләмәләргә күчәләр: $\sin^2 x = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x}$; $\cos^2 x = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}$; $\sin x \cos x = \frac{\mathrm{tg}x}{1+\mathrm{tg}^2 x}$ $\left(\sin^2 x = \frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2 x}; \cos^2 x = \frac{\mathrm{ctg}^2 x}{1+\mathrm{ctg}^2 x}; \sin x \cos x = \frac{\mathrm{ctg}x}{1+\mathrm{ctg}^2 x}\right)$.

Китерелгән формулалар белән тригонометрик тигезләмәләрнең рәвешен үзгәрткәндә, x ның МТӨ үзгәрүе мөмкин икәнен истә тотарга кирәк, чөнки беренче группа формулалар фәкать $x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$ булганда гына, ә икенче группа $x \neq \pi k$ булганда гына урынлы.

Мисаллар. а) $(\sin x - \cos x)^2 + \mathrm{tg}x = 2\sin^2 x$.

Чишү. МТӨ: $x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$. Җәя эчен квадратка күтәрәбез: $\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x + \mathrm{tg}x = 2\sin^2 x \Leftrightarrow 1 - 2\sin x \cos x + \mathrm{tg}x = 2\sin^2 x$. Беренче формулаларны кулланганнан соң, бу тигезләмә түбәндәгечә була: $1 - \frac{2\mathrm{tg}x}{1+\mathrm{tg}^2 x} + \mathrm{tg}x = \frac{2\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x} \Leftrightarrow \mathrm{tg}^3 x - \mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}x + 1 = 0 \Leftrightarrow (\mathrm{tg}x - 1)(\mathrm{tg}^2 x - 1) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{tg}^2 x = 1$.

Җавап. $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$.

б) $6\mathrm{ctg}^2 x - 2\cos^2 x = 3$.

Чишү. МТӨ: $x \neq k\pi$. Икенче группа формулаларны кулланып, $\cos x$ ны $\mathrm{ctg}\, x$ ка алыштырсак, тамырдаш тигезләмә хасил була: $6\mathrm{ctg}^2 x - \frac{2\mathrm{ctg}^2 x}{1+\mathrm{ctg}^2 x} = 3$. Моннан $6\mathrm{ctg}^4 x + \mathrm{ctg}^2 x - 3 = 0$.

Җавап. $x = \mathrm{arcctg}\left(\pm\sqrt{\frac{\sqrt{73}-1}{12}}\right) + \pi k$.

Күнегүләр

1. $2\sin 2x + 3\mathrm{tg}\, x - 5 = 0$.

2. $2\sin^2 x + \mathrm{tg}^2 x = 2$.

3. $\frac{8\operatorname{cosec}^2 2x + 1}{\sec^2 x + \mathrm{tg}^2 x} = \mathrm{ctg}^2 x + \frac{4}{3}$.

4. $\sec^2 2x - \operatorname{cosec}^2 2x = \frac{8}{3}$.

5. $4\mathrm{tg}^2 3x - \sec^2 3x = 2$.

Җаваплар

1. $x = \frac{\pi}{4}(4k + 1)$.
2. $x = \frac{\pi}{4}(2k + 1)$.
3. $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$.
4. $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$.
5. $x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$.

5.12. $\cos 2x = t$ алыштырмасы

$R\left(\sin^2 x, \cos^2 x, \cos 2x, \cos 4x\right) = 0$ рәвешле тригонометрик тигезләмә $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$ формулалары ярдәмендә билгесезе $\cos 2x = t$ булган рациональ тигезләмәгә китерелә.

Мисал. $2\cos 4x + 5\cos 2x - 1 = 2\sin^2 x$.

Чишү. Билгесез $\cos 2x$ ны t аша күрсәтсәк, бирелгән тигезләмә түбәндәге рәвешкә керә: $2\left(2t^2 - 1\right) + 5t - 1 = 2\,\frac{1-t}{2} \Leftrightarrow 2t^2 + 3t - 2 = 0 \Rightarrow t_1 = -2$ (ярамый); $t_2 = \frac{1}{2}$. Моннан $\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

Җавап. $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$.

Күнегүләр

1. $2\sin 3x \sin x + \left(3\sqrt{2} - 1\right)\cos 2x = 3.$

2. $2 + \cos 4x = 5\cos 2x + 8\sin^6 x.$

3. $\mathrm{tg}^2 x + \cos 4x = 0.$

4. $\cos^4 x - \sin^2 x\cos^2 x - 3\sin^4 x = 2\cos 2x - 2\cos 4x.$

Җаваплар

1. $x = \pm\frac{\pi}{8} + \pi k.$ 2. $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2};\ x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi k.$

3. $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2};\ x_2 = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2} + \pi k.$

4. $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(\pm\sqrt{\frac{11}{15}}\right) + \pi k.$

5.13. $\sin x \pm \cos x = t$ алыштырмасы

$R(\sin 2x,\ \sin x \pm \cos x) = 0$ рәвешендәге тригонометрик тигезләмә билгесезе $t = \sin x \pm \cos x$ булган рациональ тигезләмәгә китерелә. $R(\sin 2x,\ \sin x + \cos x) = 0$ тигезләмәсен карыйк. $\sin x + \cos x = t$ аңлатмасының ике ягын да дәрәҗәгә күтәрәбез: $\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = t^2$. Моннан $\sin 2x = t^2 - 1$. Димәк, безнең тигезләмә $R\left(t^2 - 1, t\right) = 0$ рәвешенә килә. Шулай ук $R(\sin 2x,\ \sin x - \cos x) = 0$ тигезләмәсе $R\left(1 - t^2, t\right) = 0$ рәвешенә килә. $|\sin x \pm \cos x| \le \sqrt{2}$ булганлыктан, тригонометрик тигезләмәнең $|t| \le \sqrt{2}$ булганда гына чишелеше була.

Мисаллар. а) $\sqrt{2}\sin 2x + 3(\sin x + \cos x) = 4\sqrt{2}.$

Чишү. $\sin x + \cos x$ ны t га алыштырабыз, ул вакытта $\sin 2x = t^2 - 1$ була, һәм бирелгән тигезләмә $\sqrt{2}\left(t^2 - 1\right) + 3t = 4\sqrt{2}$ рәвешенә китерелә. Моннан $t_1 = -\frac{5\sqrt{2}}{2},\ t_2 = \sqrt{2}$ ны табу өчен ике

тигезләмә табабыз: $\sin x + \cos x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ һәм $\sin x + \cos x\sqrt{2}$. Беренче тигезләмәнең чишелеше юк, икенче тигезләмәдән $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ килеп чыга.

Җавап. $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$.

б) $2(1 - \sin x - \cos x) + \operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x = 0$.

Чишү. МТӨ: $x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$; $x \neq \pi k \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi k}{2}$. $\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x = \frac{2}{\sin 2x}$ булганлыктан, $\sin x + \cos x$ ны t га алыштырсак, бирелгән тигезләмә түбәндәгечә була: $2(1 - t) + \frac{2}{t^2-1} = 0$, моннан $t\left(t^2 - t - 1\right) = 0$ һәм $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $t_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (ярамый). x ны табу өчен ике тигезләмә табыла: $\sin x + \cos x = 0$ һәм $\sin x + \cos x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Җавап. $x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi k$;

$x_2 = -\frac{\pi}{4} + (-1)^k \arcsin\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} + \pi k$.

в) $\sin^3 2x + \cos^3 2x + \sin 4x = 1$.

Чишү. Кубларның суммасын тапкырлаучыларга таркатабыз: $(\sin 2x + \cos 2x)(1 - \sin 2x\cos 2x) + \sin 4x = 1 \Leftrightarrow (\sin 2x + \cos 2x)\left(1 - \frac{1}{2}\sin 4x\right) + \sin 4x = 1$. $\sin 2x + \cos 2x$ ны t га алыштырабыз: $\sin 4x = t^2 - 1$. Тигезләмә $t\left(1 - \frac{t^2-1}{2}\right) + t^2 - 1 = 1$ яки $t^3 - 2t^2 - 3t + 4 = 0$ рәвешенә килә, моннан $t_1 = 1$, $t_{2,3} = \frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$ (ярамый). Димәк, $\sin 2x + \cos 2x = 1$.

Җавап. $x_1 = \pi k$, $x_2 = \frac{\pi}{4}(4k + 1)$.

Күнегүләр

1. $5(1 - \sin 2x) - 16(\sin x - \cos x) + 3 = 0$.

2. $4 - 4(\cos x - \sin x) - \sin 2x = 0$.

3. $5\sin 2x - 11(\sin x + \cos x) + 7 = 0$.

4. $\sec x + \operatorname{cosec} x + \sec x \operatorname{cosec} x = 5.$

5. $\frac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x + \cos x - 2} = \frac{4(\sin x + \cos x)}{9 - 3\sin 2x}.$

6. $5(\sin x + \cos x) + \sin 3x - \cos 3x = 2\sqrt{2}(1 - \sin 2x).$

7. $1 + \operatorname{tg} x = 2\sqrt{2} \sin x.$

8. $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \sin x \cos x).$

9. $\sin x + \sin^2 x + \cos^3 x = 0.$

Җаваплар

1. $x = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{2}}{10} + \frac{\pi}{4} + \pi k.$
2. $x_1 = 2\pi k; \; x_2 = -\pi/2 + 2\pi k.$
3. $x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{2}}{10} + \pi k.$
4. $x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^k \arcsin\left(\frac{7}{5\sqrt{2}}\right) + \pi k.$
5. $x = -\pi/4 + (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{2}}{3} + \pi k.$
6. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k.$
7. $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi k; \; x_2 = \frac{11}{12}\pi + 2\pi k; \; x_3 = -\frac{5}{12}\pi + 2\pi k.$
8. $x_1 = 2\pi k; \; x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$
9. $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \; x_2 = (-1)^k \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) - \frac{\pi}{4} + \pi k.$

5.14. Бериш тигезләмәләр

Әгәр $R(\lambda \sin x, \lambda \cos x) = \lambda^n R(\sin x, \cos x)$ булса, $R(\sin x, \cos x) = 0$ рәвешендәге тригонометрик тигезләмә $\sin x$ һәм $\cos x$ ка карата *n-дәрәҗә бериш тигезләмә* дип атала. Мәсәлән, $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$ икенче дәрәҗә бериш тигезләмә була, чөнки $R(\lambda \sin x, \lambda \cos x) = a(\lambda^2 \sin^2 x + b\lambda \sin x \cdot \lambda \cos x + c(\lambda \cos x)^2 =$

$= \lambda^2\left(a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x\right) = \lambda^2 R(\sin x,\ \cos x)$. n-дәрәҗә бериш тигезләмә билгесезе $\operatorname{tg} x$ яки $\operatorname{ctg} x$ булган рациональ тигезләмәгә китерелә.

Мисал. $2 \sin^3 x + 2 \sin^2 x \cos x - \sin x \cos^2 x - \cos^3 x = 0$.

Чишү. Бу өченче дәрәҗә бериш тигезләмә, $\cos x \neq 0$ булганлыктан, тигезләмәнең һәр буынын $\cos^3 x$ ка бүлгәч, эквивалент тигезләмә табабыз: $2\operatorname{tg}^3 x + 2\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 1 = 0$. Соңгы тигезләмә ике тигезләмәгә аерыла: $\operatorname{tg} x + 1 = 0$ һәм $2\operatorname{tg}^2 x - 1 = 0$, моннан $\operatorname{tg} x = -1$, $\operatorname{tg}^2 x = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$.

Җавап. $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k$;
$x_2 = \pm \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k$.

Күнегүләр

1. $\sin^2 3x = 3 \cos^2 3x$.

2. $\sin^2 x - 2 \sin x \cos x = 3 \cos^2 x$.

3. $\sin^3 \frac{x}{3} - \sin^2 \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3} - 3 \sin \frac{x}{3} \cos^2 \frac{x}{3} + 3 \cos^3 \frac{x}{3} = 0$.

4. $3 \cos^2 x = \sin^2 x + \sin 2x$.

5. $2 \sin x \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 3 \sin(\pi - x) \cos x + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cos x = 0$.

Җаваплар

1. $x = \frac{\pi}{9}(3k \pm 1)$.
2. $x_1 = \frac{\pi}{4}(4k - 1)$; $x_2 = \operatorname{arctg} 3 + \pi k$.
3. $x_1 = \frac{3\pi}{4}(1 + 4k)$; $x_2 = \pi(3k \pm 1)$.
4. $x_1 = -\operatorname{arctg} 3 + \pi k$; $x_2 = \frac{\pi}{4}(4k + 1)$.
5. $x_1 = \frac{\pi}{4}(1 + 4k)$; $x_2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k$.

5.15. Бериш тигезләмәләргә китерелә торган тигезләмәләр

$R(\sin x, \cos x) = 0$ рәвешендәге тигезләмә, әгәр һәр буынның дәрәҗәләре аермасы җөп санга тигез булса, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ бердәйлеген кулланып бериш тигезләмәгә китерелә. Мәсәлән, шундый тигезләмәләрнең берсе: $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d(d \neq 0)$. Бу тигезләмәдә сул яктагы һәр буынның дәрәҗәсе — икегә, ә уң якныкы нульгә тигез, ягъни дәрәҗәләр аермасы икегә яки нульгә тигез. Тигезләмәне үзгәртеп, $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$ тигезләмәсен, ягъни икенче дәрәҗә бериш тигезләмә табабыз.

Мисаллар. а) $6\sin^2 x + \sin x\cos x - \cos^2 x = 2$.

Чишү. $6\sin^2 x + \sin x\cos x - \cos^2 x = 2\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$ була. Тигезләмәнең ике ягын да $\cos^2 x$ яки $\sin^2 x \neq 0$ бүләргә мөмкин; $\sin^2 x$ бүлеп табабыз: $6 + \mathrm{ctg}x - \mathrm{ctg}^2 x = 2 + 2\mathrm{ctg}^2 x \Leftrightarrow 3\mathrm{ctg}^2 x - \mathrm{ctg}x - 4 = 0 \Rightarrow \mathrm{ctg}x = -1,\ \mathrm{ctg}x = \frac{4}{3}$.

Җавап. $x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi k$;

$x_2 = \mathrm{arcctg}\,\frac{4}{3} + \pi k$.

б) $\frac{\cos^2 x(1+\mathrm{ctg}x)-3}{\sin x-\cos x} = 3\cos x$.

Чишү. МТӨ: $x \neq \pi k$; $x \neq \frac{\pi}{k} + \pi k$.

Тигезләмәнең ике ягын да $\sin x - \cos x$ ка тапкырлап, түбәндәге тигезләмәне табабыз: $\cos^2 x(1 + \mathrm{ctg}x) - 3 = 3\sin x\cos x - 3\cos^2 x$. Моннан $\cos^2 x \cdot \frac{\sin x+\cos x}{\sin x} - 3 = 3\sin x\cos x - 3\cos^2 x \Leftrightarrow \cos^2 x \times \sin x + \cos^3 x - 3\sin x = 3\sin^2 x\cos x - 3\sin x\cos^2 x$. Бу тигезләмә бериш тигезләмәгә китерелә ала, чөнки бер кушылучының дәрәҗәсе — бергә, ә калганнарының өчкә тигез. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ бердәйлеген кулланып, соңгы тигезләмәнең рәвешен үзгәртәбез: $\cos^2 x\sin x + \cos^3 x -$

$-3\sin x\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = 3\sin^2 x\cos x - 3\sin x\cos^2 x$, моннан

$3\mathrm{tg}^3x + 3\mathrm{tg}^2x - \mathrm{tg}x - 1 = 0$ яки $\mathrm{tg}x = -1$ һәм $\mathrm{tg}^2x = \frac{1}{3}$.

Җавап. $x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi k;$

$x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k.$

Күнегүләр

1. $\sec 3x - 6\cos 3x = 4\sin 3x$.

2. $5\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 2$.

3. $22\cos^2 x + 4\sin 2x = 7$.

4. $(\mathrm{tg}2x + \mathrm{ctg}2x) / (\mathrm{ctg}2x - \mathrm{tg}2x) = 6\cos 4x + 4\sin 4x$.

5. $\sin^3 x - 2\cos x + \sin x \cdot \cos^2 x = 0$.

6. $\sin^3 2x + \cos 2x\cos 4x = 3\sin 2x\cos^2 2x - \cos 2x$.

Җаваплар

1. $x_1 = \frac{\pi}{12}(4k - 1);\ x_2 = \frac{1}{3}\mathrm{arctg}5 + \frac{\pi k}{3}$.
2. $x_{1,2} = \mathrm{arctg}\frac{-3\pm\sqrt{69}}{6} + \pi k$.
3. $x_1 = \mathrm{arctg}\frac{15}{7} + \pi k;\ x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi k$.
4. $x_1 = -\frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{4};\ x_2 = \frac{1}{4}\mathrm{arctg}5 + \frac{\pi k}{4}$.
5. $x = \mathrm{arctg}2 + \pi k$.
6. $x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2};\ x_2 = -\frac{1}{2}\mathrm{arctg}2 + \frac{\pi k}{2}$.

5.16. $a\sin x + b\cos x = c,\ (c \neq 0)$ рәвешендәге тигезләмә

Мондый тигезләмә икенче дәрәҗә бериш тигезләмәгә китерелә:

$$2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + b\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) = c\left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right).$$

Мисал. $3\sin 5x - 2\cos 5x = 3$.

Чишү. Була $6\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{5x}{2}-2\left(\cos^2\frac{5x}{2}-\sin^2\frac{5x}{2}\right)=3\left(\sin^2\frac{5x}{2}+\cos^2\frac{5x}{2}\right)$. Моннан $6\operatorname{tg}\frac{5x}{2}+2\operatorname{tg}^2\frac{5x}{2}-2=3\operatorname{tg}^2\frac{5x}{2}+3$ яки $\operatorname{tg}\frac{5x}{2}=1$, $\operatorname{tg}\frac{5x}{2}=5$.

Җавап. $x_1=\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi k}{5}$;

$x_2=\frac{2}{5}\operatorname{arctg}5+\frac{2\pi k}{5}$.

Күрсәтмә. $a\sin x+b\cos x=c\ \ (c\neq 0)$ рәвешендәге тигезләмәне шулай ук өстәмә φ почмагы кертү юлы белән дә чишәргә була. Тигезләмәнең сул ягын үзгәртәбез: $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a\sin x}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b\cos x}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=\sqrt{a^2+b^2}(\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$. Монда $\sin\varphi=b/\sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\varphi=a/\sqrt{a^2+b^2}$, ә аргумент $\varphi\in[0,\ 2\pi]$. Мәсәлән, $\sin x\pm\cos x=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)=$ $=\sqrt{2}\sin\left(x\pm\frac{\pi}{4}\right)$.

Моның өстәмә нәтиҗәсе булып, $|\sin x\pm\cos x|\leq\sqrt{2}$ тигезсезлеге тора.

Мисаллар. а) $3\sin 2x+2\cos 2x=3$.

Чишү. Өстәмә аргумент кертү ысулы белән тигезләмәнең рәвешен үзгәртәбез: $\sqrt{3^2+2^2}\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\sin 2x+\frac{2}{\sqrt{13}}\cos 2x\right)=3$, монда $\cos\varphi=3/\sqrt{13}$, $\sin\varphi=2/\sqrt{13}$ дип алабыз: $\sqrt{13}(\cos\varphi\sin 2x+$ $+\sin\varphi\cos 2x)=3$ яки $\sqrt{13}\sin(2x+\varphi)=3$. Соңгы тигезләмәне чишәбез: $2x+\varphi=(-1)^k\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}+\pi k$ яки $x=-\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{2}(-1)^k\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}+\frac{\pi k}{2}$. $\sin\varphi>0$, $\cos\varphi>0$, $\operatorname{tg}\varphi>\frac{2}{3}$ булганлыктан, $\varphi\in\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ һәм $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$.

Җавап. $x=-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\frac{(-1)^k}{2}\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}+\frac{\pi k}{2}$.

б) $\sin 3x - \cos 3x = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Чишү. $\sqrt{2}\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Моннан $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 3x - \frac{\pi}{4} = $
$= (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k$.

Җавап. $x = \frac{\pi}{12} + \frac{(-1)^k}{9}\pi + \frac{\pi k}{3}$.

Күнегүләр

1. $4\sin 3x + \frac{1}{3}\cos 3x = 3$.

2. $2\sin x - \cos x = \frac{2}{5}$.

3. $4\sin x + \cos x = 4$.

4. $\sin x + \cos x = 1$.

5. $\sin 2x - 4\cos 2x = 4$.

6. $\sqrt{2}\left(\cos^4 2x - \sin^4 2x\right) = \cos 2x + \sin 2x$.

Җаваплар

1. $x_1 = \frac{2}{3}\operatorname{arctg}2 + \frac{2\pi k}{3}$; $x_2 = \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{2}{5} + \frac{2\pi k}{3}$.
2. $x_1 = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 2\pi k$; $x_2 = -2\operatorname{arctg}7 + 2\pi k$.
3. $x_1 = \pi/2(1 + 4k)$; $x_2 = 2\operatorname{arctg}\frac{3}{5} + 2\pi k$.
4. $x_1 = 2\pi k$; $x_2 = \pi/2(1 + 4k)$.
5. $x_1 = \pi/2\,(2n + 1)$; $x_2 = \operatorname{arctg}4 + \pi k$.
6. $x_1 = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{8}(4n - 1)$; $x_2 = \frac{\pi}{8}(4n - 1)$.

5.17. Тигезсезлекләр ярдәмендә чишелә торган тигезләмәләр

Мисаллар. а) $\sin^5 x + \cos^4 x = 1$.

Чишү. Әгәр $\sin x = 1(\cos x = 0)$ яисә $\cos x = \pm 1(\sin x = 0)$ дип алсак, бу тигезләмә канәгатьләндерелә, ә $\sin x$ һәм $\cos x$ ның башка кыйммәтләре өчен тигезләмә тигезлеккә әверелми. Дөрестән дә, әгәр $\sin x < 1$, $|\cos x| < 1$ булса, $\sin^5 x < \sin^2 x$ һәм $\cos^4 x < \cos^2 x$

була, моның нәтиҗәсендә $\sin^5 x + \cos^4 x < \sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Димәк, бирелгән тигезләмә ике тигезләмә җыелмасына тамырдаш: $\sin x = 1$; $\cos^2 x = 1$.

Җавап. $x_1 = \frac{\pi}{2}(4k + 1)$;

$x_2 = \pi k$.

б) $\sin^5 x + \cos^5 x = 2 - \sin^4 x$.

Чишү. Теләсә нинди x өчен $\sin^5 x + \cos^5 x \leq 1$ һәм $2 - \sin^4 x \geq 1$ булганлыктан, бу тигезләмә ике тигезләмә җыелмасына тамырдаш: $\sin^5 x + \cos^5 x = 1$ һәм $2 - \sin^4 x = 1$, ягъни x ның фәкать бу ике тигезләмәнең тамырлары булган кыйммәтләре генә баштагы тигезләмәнең тамыры була. Икенче тигезләмәдән $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ килеп чыга. x ның бу кыйммәтен беренче тигезләмәгә куеп табабыз: $\sin^5\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) + \cos^5\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = \pm 1$. Шулай итеп, икенче тигезләмәнең тамырлары $k = 2n$, $n \in z$ булганда гына беренче тигезләмәнең тамыры була.

Җавап. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

в) $\cos 2x + \cos \frac{3}{4} x - 2 = 0$.

Чишү. $\cos 2x \leq 1$, $\cos \frac{3x}{4} \leq 1$ булганлыктан, бирелгән тигезләмәнең $\cos 2x = 1$ һәм $\cos \frac{3x}{4} = 1$ булганда гына чишелеше булырга мөмкин. Димәк, бирелгән тигезләмә ике тигезләмәдән торган системага тамырдаш.

Беренче тигезләмәнең чишелеше $x = \pi k_1$ $(k_1 \in z)$, ә икенче тигезләмәнеке $x = \frac{8\pi}{3} k_2$ $(k_2 \in z)$ була. x ның $\pi k_1 = \frac{8\pi k_2}{3}$ булгандагы кыйммәтләре генә системаның тамырлары була. Моннан $k_1 = \frac{8}{3} k_2$, $k_1 \in z$ булганлыктан, тигезлек үтәлсен өчен k_2 өчкә бүленергә тиеш, ягъни $k_2 = 3n$ $(n \in z)$.

Димәк, $k_1 = 8n$.

Җавап. $x = 8\pi n$.

Күнегүләр

1. $\cos 3x + \cos^5 \frac{x}{2} = 2$. **2.** $\sin 2x - \sin 6x + 2 = 0$.

3. $\cos 6x + \sin \frac{5x}{2} = 2$.

4. $(\cos 4x - \cos 2x)^2 = \sin 2x + 5$.

5. $\sec^4 x + \cos^4 x = 1 + \cos 2x - 2\sin^2 2x$.

Җаваплар

1. $x = 4\pi k$. 2. $x = \frac{\pi}{4}(4k - 1)$.

3. $x = \pi(1 + 4k)$. 4. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

5. $x = \pi k$.

5.18. Кире тригонометрик функцияләр

$y = \sin x$ функциясенә кире функция түбәндәгечә чыгарыла: Ox күчәрендә $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ кисемтәсен бүлеп алабыз, бу кисемтәдә $y = \sin x$ бертөрле үзгәрешле (бу очракта үсүче) функция, димәк, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$нең бер кыйммәтенә $y \in [-1, 1]$нең бер кыйммәте тиңдәш, киресенчә, $y \in [-1, 1]$нең бер кыйммәтенә $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$нең бер кыйммәте тиңдәш була. Бу тиңдәшлек үзара беркыйммәтле.

y һәм x арасындагы кире тиңдәшлекне күрсәтүче функция $\arcsin y$ дип атала һәм $x = \arcsin y$ тамгасы белән билгеләнә, монда y — аргумент, x функция була.

Әгәр аргумент һәм функцияләрнең гадәти билгеләнешләренә күчсәк, ул вакытта $y = \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Шулай итеп, $\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ — синусы x ка тигез булган сан (почмак, дуга) ул.

$$y = \arcsin x, \quad \text{әгәр} \quad \begin{matrix} 1)\ \sin y = x, \\ 2)\ -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}. \end{matrix}$$

Башка кире тригонометрик функцияләр шулай ук кертелә:

$$y = \arccos x, \quad \begin{cases} \cos y = x, \\ 0 \le y \le \pi \end{cases} \text{ булганда;}$$

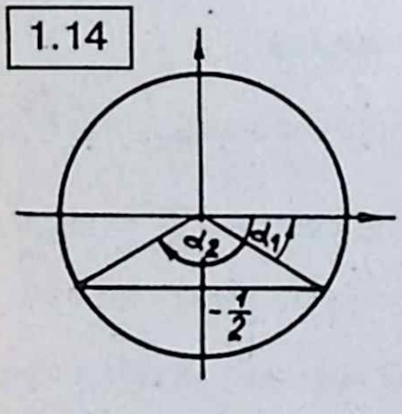
$$y = \operatorname{arctg} x, \quad \begin{cases} \operatorname{tg} y = x, \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ булганда;}$$

$$y = \operatorname{arcctg} x, \quad \begin{cases} \operatorname{ctg} y = x, \\ 0 < y < \pi \end{cases} \text{ булганда.}$$

5.19. Кире тригонометрик функцияләр кергән мәсьәләләр (мисаллар)

Мисал. $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ ның кыйммәтен табыгыз.

1.14



Чишү. Әйтик, $\alpha = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$, ул вакытта 1) $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$ һәм 2) $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$.

1.14 рәсеменнән күренгәнчә, $\sin\alpha_1 = \sin\alpha_2 = -\frac{1}{2}$. Ләкин аргумент кирәкле тигезсезлекне канәгатьләндерми, димәк, $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

Кире тригонометрик функцияләрнең билгеләмәсеннән түбәндәге бердәйлекләр килеп чыга: $\sin(\arcsin x) = x$, $|x| \le 1$; $\cos(\arccos x) = x$, $|x| \le 1$; $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$, $x \in R$; $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$, $x \in R$.

Мисаллар. а) Бердәйлекне исбатлагыз: $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $|x| \le 1$.

Моны тигезкөчле язылыш белән алыштырабыз: $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$. Ике яктан да синус алабыз: $\sin \arcsin x = x$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos(\arccos x) = x$. Димәк, сул якның синусы уң якның синусына тигез, ләкин моннан аргументларның тигезлеге килеп чыкмый әле. Шуның өчен без эзли торган почмакларның керү ара-

лыкларын табу кирәк. Билгеләмә буенча $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$;

$0 \leq \arccos x \leq \pi \Rightarrow -\pi \leq -\arccos x \leq 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - \arccos x \leq \frac{\pi}{2}$.

Шулай итеп, $\arcsin x$ һәм $\frac{\pi}{2} - \arccos x$ аргументлары $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ кисемтәсенә керәләр (бу кисемтәдә дә синус бертөрле үзгәрешле функция). Монда аргументларның синуслары тигез, димәк, аргументлар да тигез.

б) Бердәйлекне исбатлагыз: $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$, $|x| \leq 1$.

Исбатлау. Әйтик, $\alpha = \arcsin x$, ул вакытта 1) $\sin\alpha = x$ һәм 2) $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Шулай итеп, мәсьәлә $\cos\alpha$ ны исәпләүгә кайтып кала, әгәр $\sin\alpha = x$ булса, α почмагы беренче һәм дүртенче чирекләрдә ята. Димәк, $\cos\alpha = +\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - x^2}$, шуны исбатларга кирәк иде дә.

$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$, $|x| \leq 1$ бердәйлеге шулай ук исбатлана.

в) Бердәйлекне исбатлагыз: $\cos(2\arcsin x) = 1 - 2x^2$. $|x| \leq 1$.

Исбатлау. $\cos(2\arcsin x) = \cos^2(\arcsin x) - \sin^2(\arcsin x) =$

$$= \left(\sqrt{1 - x^2}\right)^2 - x^2 = 1 - x^2 - x^2 = 1 - 2x^2.$$

г) $y = \arcsin x$ функциясенең так функция икәнен исбатлагыз, ягъни $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

Исбатлау. $\sin\left(\arcsin(-x)\right) = -x$; $\sin\left(-\arcsin x\right) = -\sin\left(\arcsin x\right) = -x$ (монда синусның так функция икәнлегe кулланылды). Димәк, ике якның да синуслары тигез. Хәзер бу ике якның да синус функциясенең бер үк үсүче аралыгына керүен исбатлыйк.

Билгеләмә буенча $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq -\arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(-x) \leq \frac{\pi}{2}$. Моннан бердәйлекнең дөреслеге килеп чыга.

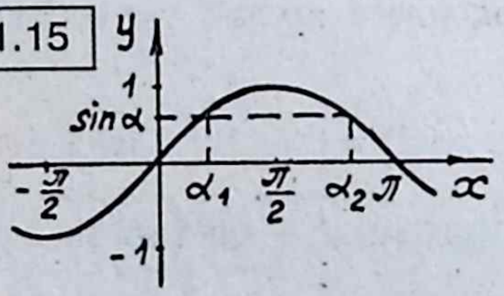
д) Исәпләп чыгарыгыз: $\alpha = \arccos\frac{2\sqrt{2}}{3} + \arcsin\frac{4-\sqrt{2}}{6}$.

Чишү. Кире тригонометрик функцияләрнең билгеләмәләре буенча: $0 < \arccos\frac{2\sqrt{2}}{3} < \frac{\pi}{2}$; $0 < \arcsin\frac{4-\sqrt{2}}{6} < \frac{\pi}{2}$. Димәк, $\alpha \in (0, \pi)$. α ны табу өчен аның берәр тригонометрик функциясен, мәсәлән, $\sin\alpha$ яки $\cos\alpha$ ны исәпләп чыгарырга кирәк. Ләкин $(0; \pi)$ интервалында синус функциясе үсә һәм кими, α аргументы табылган синусның кыйммәте беркыйммәтле була алмый (1.15 рәс.), ә косинус функциясе бертөрле кими, нәтиҗәдә, $\cos\alpha$ ның кыйммәтеннән α ның бердәнбер икәнлеге аныклана. Сумманың косинусы формуласын файдаланабыз: $\cos\alpha = \cos\left(\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3} + \arcsin\frac{4-\sqrt{2}}{6}\right) = \cos\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3} \times$

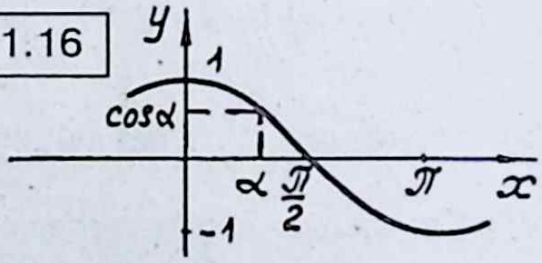
$$\times \cos\arcsin\frac{4-\sqrt{2}}{6} - \sin\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\sin\arcsin\frac{4-\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{1-\left(\frac{4-\sqrt{2}}{6}\right)^2} -$$

$$-\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}\cdot\frac{4-\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

1.15



1.16



Нәтиҗәдә $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ны табабыз.

Җавап. $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

е) Исәпләргә: $\cos(\operatorname{arc\,tg} x)$.

Чишү. Әйтик, $\alpha = \operatorname{arc\,tg} x$, ул вакытта $\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = x, \\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Күрсәтелгән интервалда косинус уңай сан, шуның өчен: $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Җавап. $\cos(\operatorname{arc\,tg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

ж) Бердәйлекне исбатлагыз: $\arccos\frac{1}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{7}\right) = \arccos\left(-\frac{13}{14}\right)$.

Исбатлау. Сумманың косинусы формуласын файдаланып табабыз:

$$\cos\left(\arccos\frac{1}{2}+\arccos\left(-\frac{1}{7}\right)\right)=\cos\arccos\frac{1}{2}\cos\arccos\left(-\frac{1}{7}\right)-\sin\arccos\frac{1}{2}\times$$

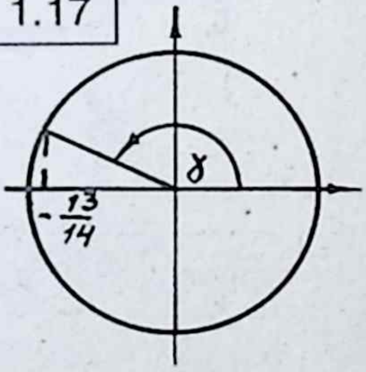
$$\times\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{7}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{7}\right)-\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\sqrt{1-\left(-\frac{1}{7}\right)^2}=-\frac{13}{14}.$$

$$\cos\left(\arccos\left(-\frac{13}{14}\right)\right)=-\frac{13}{14}.$$

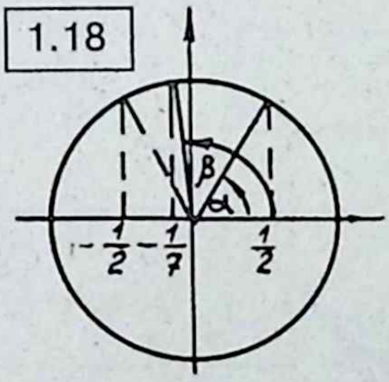
Хәзер сул һәм уң якларда күрсәтелгән дугаларның косинусның бертөрле кимүче $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ интервалында ятканын күрсәтик. Әйтик, $\alpha=\arccos\frac{1}{2};\ \beta=\arccos\left(-\frac{1}{7}\right)$.

Билгеләмә буенча (1.18 рәс.): $\alpha=\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2}<\beta<\pi-\frac{\pi}{2}$. Шуның өчен $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}<\alpha+\beta<\pi\Rightarrow\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$. Әгәр $\gamma=\arccos\left(-\frac{13}{14}\right)$ (1.17 рәс.) булса, γ дугасы шул ук интервалда ята. Бердәйлек тулысынча исбатланды.

1.17



1.18



з) Бердәйлекне исбатлагыз: $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$. Ике аргумент суммасының тангенсы формуласын файдаланып, бердәйлекнең сул ягы тангенсын исәплибез: $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)=\frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)}=$ $=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1.$ $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1,\ 0<\operatorname{arctg}\frac{1}{2}<\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4},\ 0<\operatorname{arctg}\frac{1}{3}<\frac{\pi}{4}$ булганлыктан, $0<\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}<\frac{\pi}{2};\ 0<\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$.

Шулай итеп, бердәйлекнең ике ягы да бер үк интервалга керә. Бу интервалда тангенс бертөрле үсүче функция (монотон үсүче функция). Бердәйлек исбатланды.

Кире тригонометрик функцияләр булган тигезләмәләрне чишкәндә, бу тигезләмәләрне кире функцияләр булмаган тигезләмәләргә кайтарып калдыру юлын еш кына кулланалар.

Әйтик, түбәндәге тигезләмәне чишәргә кирәк булсын: $\arcsin f(x) = \arccos \varphi(x)$ (1.19). Монда $|f(x)| \le 1$ һәм $|\varphi(x)| \le 1$. Ике якның да формаль синусларын табып, түбәндәге тигезләмәгә күчәбез:

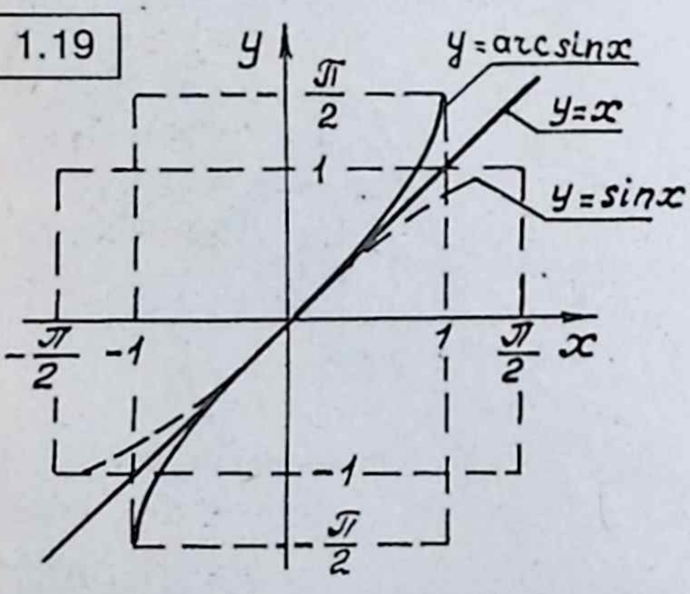
$$\sin \arcsin f(x) = \sin \arccos \varphi(x) \Rightarrow f(x) = \sqrt{1 - \varphi^2(x)}. \qquad (1.20)$$

(1.19) тигезләмәсеннән (1.20) тигезләмәсенә күчү тигезкөчле түгел, (1.20) тигезләмәсе (1.19) тигезләмәсенең нәтиҗәсе генә һәм шуңа күрә табылган тамырның чын тамыр булуын баштагы тигезләмәгә куеп тикшерергә кирәк.

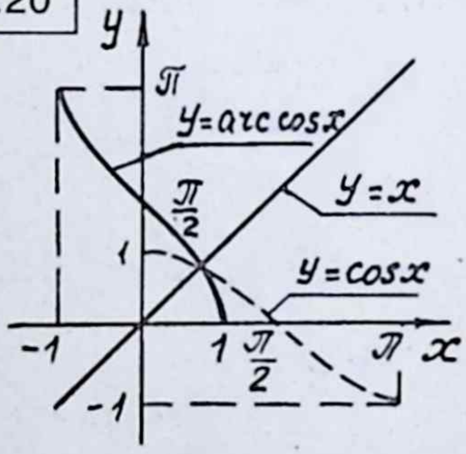
Шулай да, әгәр тигезләмәнең ике ягының да бер үк монотон интервалга (мәсәлән, синус функциясе өчен) керүен ачыклап булса, x ның (1.19) һәм (1.20) тигезләмәләрен эквивалент итүче кыйммәтләрен бүлеп алырга була.

Мондый фикер йөртү арктангенс һәм арккотангенс булган тигезләмәләр өчен дә урынлы. Бу очракта ике якның да тангенсын, я котангенсын табу уңайрак булыр.

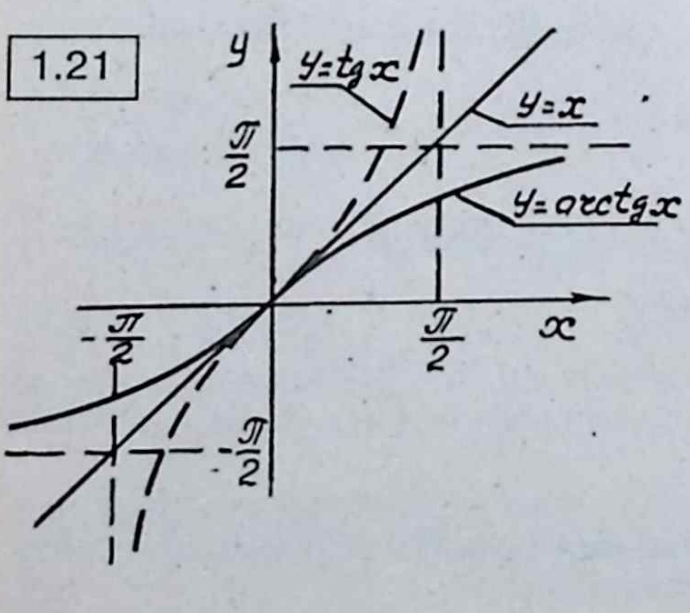
1.19



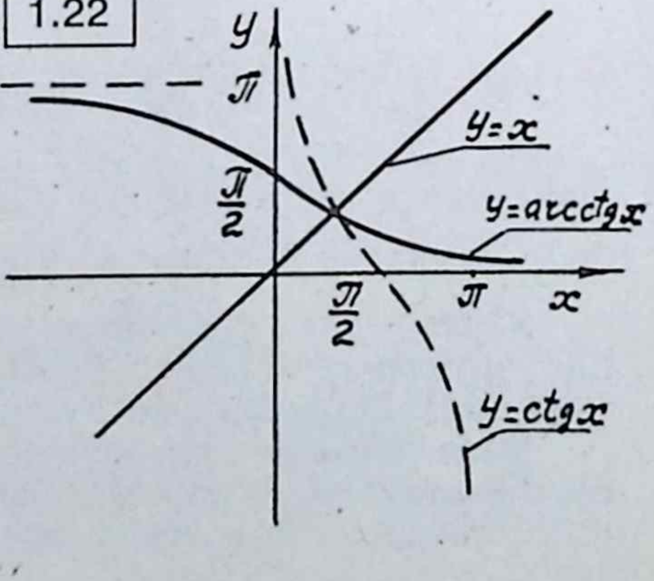
1.20



1.21



1.22



Мисаллар. Тигезләмәләрне чишегез: а) $\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{3} = \operatorname{arc\,tg}x$.

Чишү. МТӨ: $x \in R$. Ике яктан да тангенс алып табабыз:

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right)} = \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}x) \Rightarrow \frac{\frac{x}{2}+\frac{x}{3}}{1-\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3}} = x \Rightarrow \frac{5x}{6-x^2} = x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -1;\ \ x_2 = 0;\ \ x_3 = 1.$$

$x_2 = 0$ тигезләмәнең тамыры икәне ап-ачык. $x_3 = 1$ тигезләмәне канәгатьләндерә, димәк, ул шулай ук тамыр була (моннан алдагы мисалны карагыз), $x_1 = -1$, арктангенс функциясенең так булуы сәбәпле, тигезләмәнең тамыры була.

Җавап. $x_1 = -1;\ x_2 = 0;\ x_3 = 1$.

б) $\operatorname{arc\,tg}(x + 2) - \operatorname{arc\,tg}(x + 1) = \frac{5}{4}\pi$.

Чишү. МТӨ: $x \in R$. Үткән мисалдагы кебек эш итеп, түбәндәге тигезләмәгә киләбез: $\frac{x+2-(x+1)}{1+(x+2)(x+1)} = 1 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = -2$.

Тикшерү бу саннарның баштагы тигезләмәнең тамырлары булмавын күрсәтә.

Җавап. $\varnothing$.

в) $\frac{\pi}{2} + \operatorname{arcctg}\left(x^2 + 1\right) = \operatorname{arctg}(x - 3)$.

Чишү. МТӨ: $x \in R$. Билгеләмә буенча $0 < \operatorname{arcctg}(x - 3) < \pi$, $0 < \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\left(x^2 + 1\right) < \pi$. Ике якның да котангенсын исәпләп, эквивалент тигезләмә табабыз (чөнки котангенс $(0;\ \pi)$ интервалында монотон кимүче функция, димәк, ике аргументның котангенслары тигез булудан аларның аргументлары да тигез икәнлеге килеп чыга):

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\left(x^2 + 1\right)\right) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}(x - 3)) \Leftrightarrow -\left(x^2 + 1\right) = x - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -2;\ \ x_2 = 1.$$

Җавап. $x_1 = -2,\ x_2 = 1$.

г) $\arcsin(1 - x) - 2\arcsin x = \frac{\pi}{2}$.

Чишү. МТӨ: $\begin{cases} |1 - x| \le 1, \\ |x| \le 1 \end{cases} \Rightarrow 0 \le x \le 1.$

Тигезләмәне эквивалентлы рәвештә үзгәртеп, болай язабыз: $\arcsin(1-x)=\frac{\pi}{2}+2\arcsin x$. Монда $-\frac{\pi}{2}\le\arcsin(1-x)\le\frac{\pi}{2}$;

$-\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{2}+2\arcsin x\le\frac{3\pi}{2}$ икәнен искә төшерик. Ике якның да синусын исәплибез: $\sin(\arcsin(1-x))=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin x\right)\Rightarrow 1-x=1-2x^2$; $x_1=0$; $x_2=1/2$.

Тикшереп карап, $x_1=0$ нең тамыр икәнен беләбез, $x_2=\frac{1}{2}$ баштагы тигезләмәне канәгатьләндерми: $\arcsin\frac{1}{2}-2\arcsin\frac{1}{2}=-\arcsin\frac{1}{2}=$ $=-\frac{\pi}{6}\ne\frac{\pi}{2}$. x ның бу кыйммәте төп тигезләмәдән нәтиҗә тигезләмәгә күчкәндә барлыкка килә.

Җавап. $x=0$.

д) $\arccos 4x=\arcsin 3x$.

Чишү. МТӨ: $\begin{cases}|4x|\le 1;\\ |3x|\le 1\end{cases}\Rightarrow -\frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{4}$.

Тигезләмәнең ике ягының да тамгалары $\left[0;\frac{1}{4}\right]$ кисемтәсендә генә тәңгәл булалар, монда $0\le\arccos 4x\le\frac{\pi}{2}$; $0\le\arcsin 3x\le\frac{\pi}{2}$; $\left[-\frac{1}{4};0\right]$ кисемтәсендә $0<\frac{\pi}{2}\le\arccos 4x\le\pi$; $-\frac{\pi}{2}<\arcsin 3x\le 0$, димәк, тигезләмәнең чишелеше юк. $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ интервалында синус функциясе монотон үсә, шулай булгач, әгәр ике якның да $\left[0;\frac{1}{4}\right]$ кисемтәсендә синусын исәпләсәк, төп тигезләмәгә эквивалент тигезләмә табабыз: $\sin(\arccos 4x)=\sin(\arcsin 3x)\Rightarrow\sqrt{1-16x^2}=3x\Rightarrow 25x^2=$ $=1\Rightarrow x=\frac{1}{5}$.

Җавап. $x=1/5$.

Югары уку йортына керергә җыенучыларга кире тригонометрик функцияләрнең графикларын белү кирәген игътибарга алыйк. Үзара кире функцияләрнең графиклары $y=x$ турысына симметрияле булалар. Шуннан чыгып, кире тригонометрик функцияләрнең графигын төзү авыр түгел.

Күнегүләр

Бердәйлекләрне исбатлагыз:

1. $\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; $x \in R$.

2. $\operatorname{tg}(\arcsin x) = x/\sqrt{1-x^2}$, $|x| < 1$.

3. $\operatorname{ctg}(\arccos x) = x/\sqrt{1-x^2}$, $|x| < 1$.

4. $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

5. $\sin(2\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}$, $|x| \leq 1$.

6. $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$, $|x| \leq 1$.

7. $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$, $x \in R$.

8. $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$, $x \in R$.

9. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$, $x \in R$.

10. $\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$.

11. $2\operatorname{arctg} 0{,}2 + \operatorname{arctg} 0{,}25 = \operatorname{arctg} 32/43$.

12. $\operatorname{arctg}(3 + 2\sqrt{2}) - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} = \pi/4$.

Исәпләгез:

1. $\cos\left(2\arcsin\frac{2}{7}\right)$.

2. $\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(-2{,}4)\right)$.

3. $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$.

4. $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{\sqrt{33}}{7}\right)\right)$.

5. $\sin\left(\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13}\right)$.

6. $\operatorname{tg}\left(5\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{4}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

7. $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{4}{7}\right)\right)$.

Җаваплар

1. $\frac{41}{49}$. 2. $3/\sqrt{13}$. 3. $24/25$. 4. $-3/\sqrt{33}$. 5. $63/65$. 6. -1. 7. $\sqrt{33}/11$.

Тигезләмәләрне чишегез:

1. $\arcsin x + \arcsin 2x = \frac{\pi}{3}$.

2. $\operatorname{arctg}(1 + x) + \operatorname{arctg}(1 - x) = \frac{\pi}{4}$.

3. $\arcsin \frac{3x}{5} + \arcsin \frac{4x}{5} = \arcsin x$.

4. $\sin\left(\frac{\arccos x}{5}\right) = 1$.

5. $\operatorname{arctg}\left(x^2 - 3x - 3\right) = -\frac{3\pi}{4}$.

6. $\arcsin 2x = 3 \arcsin x$.

7. $\arccos(x - 1) = 2 \arccos x$.

8. $\arcsin x + \arcsin \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}$.

9. $\operatorname{arctg}\left(x^2 + x\right) + \operatorname{arctg}\left(x^2 - x\right) = \frac{\pi}{4}$.

10. $\operatorname{arctg}(x - 1) + \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(x + 1) = \operatorname{arctg} 3x$.

11. $\operatorname{arctg} 3^x - \operatorname{arctg} 3^{-x} = \pi/6$.

Җаваплар

1. $x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$.
2. $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$.
3. $x_{1,2} = \pm 1;\ x_3 = 0$.
4. Чишелеше юк.
5. Чишелеше юк.
6. $x_{1,2} = \pm\frac{1}{2};\ x_3 = 0$.
7. $x_1 = 0;\ x_2 = \frac{1}{2}$.
8. $x = 2/\sqrt{5}$.
9. $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.
10. $x_{1,2} = \pm\frac{1}{2};\ x_3 = 0$.
11. $x = 1/2$.

6. ТИГЕЗЛӘМӘЛӘР СИСТЕМАЛАРЫ

6.1. Төп төшенчәләр һәм билгеләмәләр

Ансат аңлашылсын өчен, без x һәм y билгесезләре кергән тигезләмәләр системасы турында сүз йөртик. Ләкин әйткәннәрнең барысы да теләсә нинди хәреф белән тамгаланган теләсә никадәр сандагы билгесезләр кергән тигезләмәләр системасына да кагыла.

Башта *ике билгесезле бер тигезләмә* карыйк. Андый тигезләмәне билгесез x һәм y ка карата түбәндәге рәвештә язарга мөмкин: $f(x, y) = \varphi(x, y)$ яки $F(x, y) = 0$.

$f(x, y) = \varphi(x, y)$ тигезләмәсенең мөмкин табылган кыйммәтләр өлкәсе дип, тигезләмәнең ике ягының да мәгънәсен билгеләүче тәртипләндерелгән саннар парлары (x, y) күплеге атала.

"Саннар пары" дип әйткәндә, без һәрвакыт тәртипләндерелгән чын саннар парын истә тотабыз.

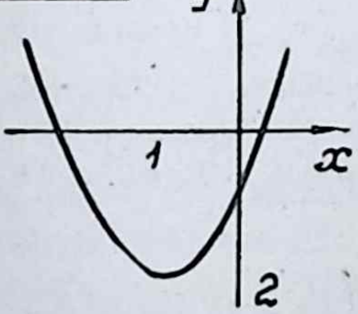
Тигезләмәдә x һәм y урынына (x_0, y_0) саннар парын куйгач, $f(x_0, y_0) = \varphi(x_0, y_0)$ дөрес тигезлеге табылса, әлеге саннар пары тигезләмәнең чишелеше дип атала.

Тигезләмәне чишү дип, бу тигезләмәнең тамырын табу яки аларның юклыгын исбатлауга әйтәләр. Саннар яссылыгында һәр (x_0, y_0) чишелешенә координаталары x_0, y_0 булган нокта тиңдәш була, ә бу чишелешләрнең күплеге, гомумән әйткәндә, ниндидер сызык хасил итә.

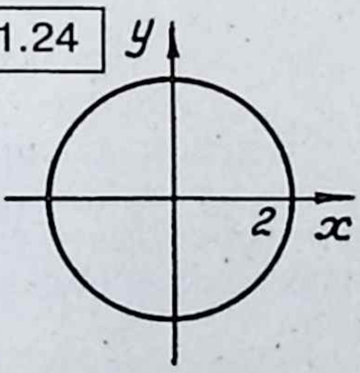
Мисаллар. 1) $y = x^2 + 2x - 1$.

Бу тигезләмәнең чишелешләре күплеге параболада ятучы нокталар күплегеннән (саннар парлары күплегеннән) гыйбарәт (1.23 рәс.).

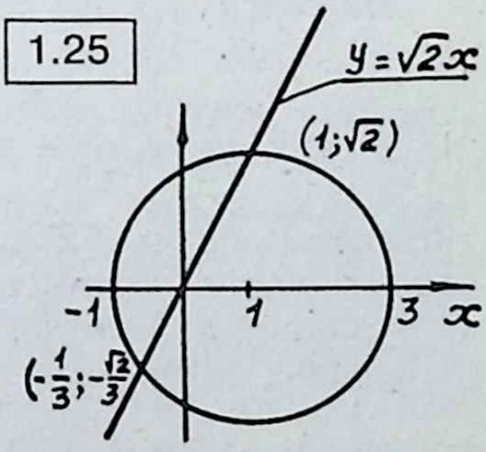
1.23



1.24



1.25



2) $x^2 + y^2 = 4$.

Бу тигезләмәнең чишелешләре күплеге радиусы 2 гә тигез, үзәге координаталар башлангычында булган әйләнәдә ятучы нокталар (саннар пары) күплегеннән гыйбарәт (1.24 рәс.).

3) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 0$.

Бу тигезләмәне бердәнбер саннар пары $(1; -2)$ канәгатьләндерә, шуның өчен аны координаталары $(1; -2)$ булган нокта тигезләмәсе дип атарга мөмкин.

4) $x^2 + y^2 + 1 = 0$.

Бу тигезләмәнең чын тамырлары юк.

Әгәр $f(x, y) = \varphi(x, y)$ һәм $F(x, y) = \Phi(x, y)$ тигезләмәләренең чишелешләре күплеге бер үк булса, ул вакытта бу ике тигезләмә *тигезкөчле (эквивалент)* тигезләмәләр дип атала.

Бу очракта түбәндәге тамгалау кулланыла: $f(x, y) = \varphi(x, y) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow F(x, y) = \Phi(x, y)$ һәм түбәндәге кагыйдәләр файдаланыла:

1. Әгәр $g(x, y)$ беренче тигезләмәнең МТӨндә анықланса, $f(x, y) = \varphi(x, y) \Leftrightarrow f(x, y) + g(x, y) = \varphi(x, y) + g(x, y)$ була.

Бу кагыйдә еш кына түбәндәге рәвештә кулланыла:

$$f(x, y) = \varphi(x, y) \Leftrightarrow f(x, y) - \varphi(x, y) = 0.$$

2. Әгәр а) $g(x, y) \neq 0$ һәм б) $g(x, y)$ бирелгән тигезләмәнең МТӨндә анықланса,

$$f(x, y) = \varphi(x, y) \Leftrightarrow g(x, y)f(x, y) = g(x, y)\varphi(x, y).$$

Әгәр а) шарты үтәлмәсә, чит тамырлар килеп чыгуы мөмкин. Әгәр б) шарты үтәлмәсә, тамырларның югалуы мөмкин.

Нәтиҗә. $f(x, y) = \varphi(x, y) \Leftrightarrow \alpha f(x, y) = \alpha\varphi(x, y), \quad \alpha \neq 0$.

3. $g(x, y)f(x, y) = g(x, y)\varphi(x, y)$ тигезләмәсе $\left\{\begin{array}{l} g(x, y) = 0, \\ f(x, y) = \varphi(x, y) \end{array}\right.$ тигезләмәләре җыелмасына тигезкөчле, ягъни баштагы тигезләмәнең барлык чишелешләре соңгы ике тигезләмәнең чишелешләре арасында була, һәм киресенчә, соңгы ике тигезләмәнең барлык чишелешләре беренче тигезләмәнең чишелешләре булалар.

Мисаллар. 1. $(x-1)^2 + y^2 = 2 \Leftrightarrow \left(x^2 + y^2 + 1\right)\left((x-1)^2 + y^2\right) = 2\left(x^2 + y^2 + 1\right)$, чөнки $g(x, y) = x^2 + y^2 + 1 \neq 0$. Беренче тигезләмәдәге кебек, x һәм y ның барлык кыйммәтләре өчен дә $g(x, y)$ анык.

2. $(x-1)^2 + y^2 = 2$.

$\left(y - \sqrt{2}x\right)\left((x-1)^2 + y^2\right) = 2\left(y - \sqrt{2}x\right)$ рәвешле тигезләмә баштагы тигезләмәгә тигезкөчле түгел, чөнки соңгы тигезләмәнең чише-

лешләре булып $y = \sqrt{2}x$ турысында яткан барлык нокталар күплеге тора, ә бу саннар парлары күплегенең $\left(-\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ һәм $\left(1; \sqrt{2}\right)$ нокталарыннан башкаларының координаталары беренче тигезләмәнең чишелеше булмый (1.25 рәс.).

3. $$\left(y - \sqrt{2}x\right)\left(\left(x-1\right)^2 + y^2\right) = 2\left(y - \sqrt{2}x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y - \sqrt{2}x = 0, \\ \left(x-1\right)^2 + y^2 = 2, \end{array}\right.$$

ягъни баштагы тигезләмәнең чишелеше бер үк вакытта турыда һәм әйләнәдә ятучы нокталардан гыйбарәт.

Ике билгесезле ике тигезләмәдән торган системага күчик. Гомуми рәвештә бу системаны болай язарга мөмкин:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = \varphi_1(x, y), \\ f_2(x, y) = \varphi_2(x, y). \end{cases} \qquad (1.21)$$

Системага кергән x һәм y билгесезләренең МТӨ дип, һәр ике тигезләмәнең МТӨнең уртак өлеше (кисешмәсе) атала.

Әгәр $f_1(x_0, y_0) = \varphi_1(x_0, y_0)$,

$f_2(x_0, y_0) = \varphi_2(x_0, y_0)$ булса, (x_0, y_0) саннары пары тигезләмәләр системасының чишелеше дип атала.

Геометрик күзлектән караганда, (x_0, y_0) саннар пары — тигезләмәләр белән бирелгән ике кәкре сызыкның кисешү ноктасы координатлары ул.

Системаны чишү — бу системаның барлык тамырларын (бирелгән сызыкларның барлык кисешү нокталарын) табу дигән сүз. Әгәр системаның тамыры (чишелеше) булмаса, андый система тамырдаш булмаган тигезләмәләр системасы дип атала. Геометрик яктан караганда, тигезләмәләрнең тамырдаш булмавы, бу тигезләмәләргә тиңдәш кәкре сызыкларның кисешү ноктасы юклыгын, я булмаса берәр тигезләмәнең кәкре сызык тигезләмәсе булмавын аңлата. Тигезләмәләр системасын чишкәндә аны, чишелеше ансат кына табыла торган система килеп чыкканчы, эзлекле рәвештә гадирәк һәм тигезкөчле система белән алыштыралар. Бу вакытта түбәндәге кагыйдәләрдән файдаланалар:

1. Системага кергән ике тигезләмәнең урыннарын алыштырсак, тигезкөчле система хасил була.

2. Әгәр системага кергән бер тигезләмәне аңа тигезкөчле тигезләмәгә алыштырсак, баштагы системага тигезкөчле система табабыз.

а) теләсә нинди (1.21) рәвешле система түбәндәге тигезләмәләр системасына тигезкөчле: $\begin{cases} P(x, y) = 0; \\ Q(x, y) = 0, \end{cases}$

биредә $P(x, y) = f_1(x, y) - \varphi(x, y)$; $Q(x, y) = f_2(x, y) - \varphi_2(x, y)$.

б) Барлык x һәм y өчен $f_1(x, y) \neq 0$; $\varphi_1(x, y) \neq 0$ булганда

$$\begin{cases} f_1(x, y) = \varphi_1(x, y); \\ f_2(x, y) = \varphi_2(x, y), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x, y) = \varphi_1(x, y); \\ f_1(x, y) f_2(x, y) = \varphi_1(x, y)\varphi_2(x, y). \end{cases}$$

в) Барлык x һәм y өчен $f_2(x, y) \neq 0$, $\varphi_2(x, y) \neq 0$ булганда

$$\begin{cases} f_1(x, y) = \varphi_1(x, y); \\ f_2(x, y), = \varphi_2(x, y), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x, y) = \varphi_1(x, y); \\ \dfrac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)} = \dfrac{\varphi_1(x,y)}{\varphi_2(x,y)}. \end{cases}$$

3. $\begin{cases} P(x, y) = 0; \\ Q(x, y), = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha P(x, y) + \beta Q(x, y) = 0; \\ Q(x, y) = 0. \ (\alpha \neq 0). \end{cases}$

Алгебраик кушу ысулының бу расламага нигезләнүен искә төшерик.

4. $\begin{cases} y = g(x); \\ Q(x, y) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = g(x); \\ Q(x,\ g(x)) = 0. \end{cases}$

Нәтиҗә. Әгәр $P(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x)$ булса,

$$\begin{cases} P(x, y) = 0; \\ Q(x, y) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = g(x); \\ Q(x,\ g(x)) = 0 \end{cases}$$ була.

Билгесезләрне чыгару (алыштырып кую) ысулы була. Бу расламага нигезләнә.

5. Тигезләмәләр системасы $\begin{cases} P_1(x, y) \cdot P_2(x, y) \ldots P_n(x, y) = 0; \\ Q(x, y) = 0. \end{cases}$

түбәндәге системалар җыелмасына тигезкөчле:

$$\begin{cases} P_1(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0, \end{cases} \begin{cases} P_2(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0, \ldots \end{cases} \begin{cases} P_n(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0. \end{cases}$$

6.2. Сызыкча тигезләмәләр системасы

Билгесезләре беренче дәрәҗәдә генә кергән тигезләмәләр системасы *сызыкча тигезләмәләр системасы* дип атала. Мәсәлән, ике билгесезле ике тигезләмәдән торган сызыкча тигезләмәләр системасы түбәндәге рәвештә була $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$

Бу система өчен өч төрле очрак булырга мөмкин:

1\. Әгәр $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ булса, (1.22)

системаның бердәнбер чишелеше була.

2\. Әгәр $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ булса, (1.23)

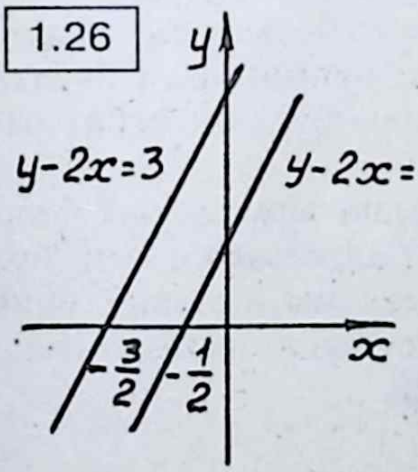
системаның чишелеше юк (тигезләмәләр тамырдаш түгел).

3\. Әгәр $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ (1.24)

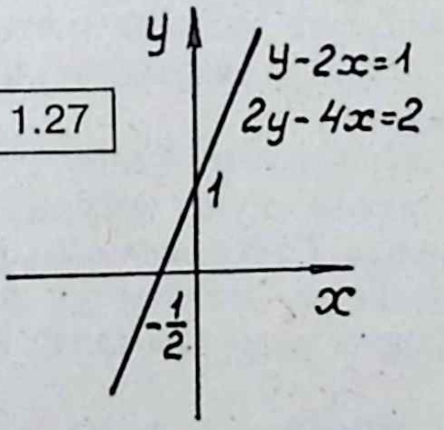
булса, системаның чишелешләре чиксез күплек тәшкил итә.

Мәсәлән, $\begin{cases} y - 2x = 1, \\ 2y - 4x = 3 \end{cases}$ системасының чишелеше юк, чөнки беренче тигезләмәдән y ны табып, $y = 2x + 1$ тигезләмәсенә куйсак: $2(2x + 1) - 4x = 3$ яки $2 = 3$, ә бу тигезлек түгел. Монда (1.23) шарты булуын искә төшерик: $\frac{1}{2} = \frac{-2}{-4} \neq \frac{1}{3}$.

1.26



1.27



Геометрик яктан карасак, бу тигезләмәләр белән бирелгән ике туры бер-берсенә параллель, һәм аларның кисешү нокталары юк дигән сүз (1.26 рәс.).

$\begin{cases} y - 2x = 1, \\ 2y - 4x = 2 \end{cases}$ системасын тикшерик.

Бу турылар параллель һәм тәңгәл киләләр, шуның өчен системаның чишелешләре — чиксез күплек, $(a, 2a+1)$ рәвешле саннар парлары күплеген тәшкил итә, биредә $a \in R$, бу (1.24) шартына туры килә: $\frac{1}{2} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$ (1.27 рәс.).

Ниһаять, алгебраик кушу ысулын кулланып, $\begin{cases} y - 2x = 1, \\ 2y - x = 5 \end{cases}$ системасының бердәнбер чишелеше барын күрсәтү авыр түгел: беренче тигезләмәне -2 гә тапкырлап, тигезләмәләрне кушабыз, ул вакытта: $3x = 3$, моннан $x = 1$. Беренче тигезләмәдән $y = 3$ икәнен табабыз. Биредә (1.22) шарты үтәлә: $\frac{1}{2} \neq \frac{-2}{-1}$.

n билгесезле n тигезләмәдән торган сызыкча тигезләмәләр системасы түбәндәге рәвештә бирелә:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = c_n, \end{cases}$$

биредә билгесезләр алдындагы коэффициентлар һәм ирекле буыннар реаль саннар. Әгәр ирекле буыннарның берсе генә булса да нульгә тигез булмаса, ул вакытта бирелгән система *бериш булмаган* система дип, әгәр дә барысы да нульгә тигез булса, *бериш система* дип атала. Һәр сызыкча системаның я тамырдаш булмавын, я бердәнбер чишелешле булуын, я чиксез күп чишелешләре булуын исбат итәргә мөмкин.

Ике яки өч билгесезле системалар я алмаштыру ысулы белән, я алгебраик кушу ысулы белән чишелә; ә билгесезләр күп булган очракта *Гаусс методы* дип атала торган ысулны куллану уңайлырак. Гаусс методы ул алгебраик кушу ысулына нигезләнгән. Бу методны гади мисаллар ярдәмендә аңлатыйк.

Мисал. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

Чишү. Беренче тигезләмәне икенче һәм өченче тигезләмәләрдән алып, эквивалент система табабыз:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ \quad x_2 - 4x_3 = -4, \\ \quad -3x_2 - 2x_3 = -2. \end{cases}$$

Икенче тигезләмәне 3 кә тапкырлап, өченче тигезләмәгә кушсак, тигезкөчле система табабыз:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ \quad x_2 - 4x_3 = -4, \\ \quad\quad -14x_3 = -14. \end{cases}$$

Шулай итеп, баштагы система *өчпочмаклы система* дип атала торган рәвешкә килә, ә аның чишелеше җиңел: соңгы тигезләмәдән $x_3 = 1$; икенче тигезләмәдән $x_2 = 0$; беренчедән $x_1 = -1$ була.

Баштагы тигезләмәнең бердәнбер чишелеше бар (–1, 0, 1).

Күнегүләр

1. $\begin{cases} 3x - 5y = 13, \\ 2x + 7y = 81. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 2x + 5y = 2, \\ 6x + 15y = -1. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x - 3y = 4, \\ 9y - 3x = -12. \end{cases}$

4. m параметрының кыйммәте нинди булганда,

$\begin{cases} (m + 3)x + 2y = 2m, \\ 2x + my = 1 \end{cases}$ системасының

а) бердәнбер чишелеше бар? б) чиксез күп чишелеше була? в) система чишелеше булмый?

5. Системаны тикшерегез: $\begin{cases} (a + 1)x - (2a - 1)y = a, \\ (3a + 1)x - (3a - 1)y = a + 1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{18}{3x-2y} + \dfrac{11}{2x-3y} = 13, \\ \dfrac{27}{3x-2y} + \dfrac{2}{3y-2x} = 1. \end{cases}$

7. c һәм d параметрлары нинди булганда,

$$\begin{cases} (c + 1)^2 x - (c + 1)y = -c, \\ (d - 1)x + (5 - 2d)y = c + 4 \end{cases}$$

системасының бердәнбер (1; 1) чишелеше була?

8. Тигезләмәләр системалары тигезкөчле булсын өчен a һәм b параметрларының барлык кыйммәтләрен табыгыз:

$$\begin{cases} ax + 2y = b + 1, \\ x + y = 3 \end{cases} \quad \text{һәм} \quad \begin{cases} 2x + y = a^2 + 2, \\ x + 3y = 3. \end{cases}$$

Тигезләмәләр системаларын чишегез:

9. $\begin{cases} ax + 4y = 9, \\ 9x + ay = 1. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{1}{1-ax} + \dfrac{1}{1+ay} = 1, \\ \dfrac{2}{1-ax} - \dfrac{3}{1+ay} = -\dfrac{4}{3}. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x - y - z = 10, \\ x + 2y - 3z = -10, \\ 2x + y - 2z = 20. \end{cases}$

12. a параметрының нинди кыйммәте өчен система

$\begin{cases} x + 1{,}5y = 4, \\ 4x + 6y = a \end{cases}$ чиксез күп чишелешле була?

13. Тигезләмәләр тамырдаш булсын өчен a параметрының кыйммәтләрен табыгыз: $3x - 2y = 6,$

$ax + y = -3.$

Тигезләмәләр системаларын чишегез:

14. $\begin{cases} x + ay = 1, \\ ax - 3ay = 2a + 3. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x - y - z = 5, \\ 2x + y + 3z = 3, \\ x - 4y - 6z = 7. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x + 2y - z = 0, \\ 3x + 5y + z = -10, \\ x + y + 3z = -10. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 4, \\ 3x + 4y - 2z = 5, \\ 4x + 5y + 6z = 15. \end{cases}$

Җаваплар

1. (16; 7). 2. Системаның чишелеше юк. 3. Система чиксез күп чишелешле, алар $x = 4 + 3c$ формуласы аша исәпләнәләр, $y = c$, биредә $c \in R$. 4. $m \neq -4$ һәм $m \neq 1$ булганда системаның бердәнбер чишелеше бар; $m = -4$ булса, системаның чишелеше юк; $m = 1$

булса, система күп чишелешле була. 5. $a \neq 0$, $a \neq 1$ булса, системаның бердәнбер чишелеше була; $a = 0$ булса, чишелеше юк; $a = 1$ — система чиксез күп чишелешле була. 6. (5; 3). 7. $c = d = 0$. 8. $a = -2$. $b = -7$. 9. Әгәр $a \neq \pm 6$ булса, $x = \frac{9a-4}{a^2-36}$, $y = \frac{a-81}{a^2-36}$, $a = \pm 6$ булса, системаның чишелеше юк. 10. Әгәр $a = 0$ булса, чишелеше юк, әгәр $a \neq 0$ булса, $x = -\frac{2}{a}$, $y = \frac{1}{2a}$. 11. (20; 0; 10). 12. $a = 16$. 13. $a \in R$. 14. Әгәр $a \neq 0$, $a \neq -3$ булса, $x = 2$, $y = -\frac{1}{2}$, әгәр $a = 0$ булса, чишелеше булмый, әгәр $a = -3$ булса, система чиксез күп чишелешле була. 15. $\varnothing$. 16. $(-7c - 20; 4c + 10; c)$, $c \in R$. 17. (1; 1; 1).

6.3. Рациональ тигезләмәләр системасы

Мисаллар. а) Системаны чишегез $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10; \\ xy = 3. \end{cases}$

Чишү. Беренче ысул (алыштыру методы). Икенче тигезләмәдән $y = \frac{3}{x}$ була; y ны беренче тигезләмәгә куеп, гади үзгәртүләрдән соң биквадрат тигезләмә табабыз: $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$. Аңардан $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm 3$ һәм $y_1 = 3$; $y_2 = -3$; $y_3 = 1$; $y_4 = -1$.

Җавап. (1; 3), (−1; − 3), (3; 1), (−3; − 1).

Икенче ысул (яңа билгесез кертү методы). $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$ булганлыктан, системаны түбәндәгечә язарга мөмкин:

$$\begin{cases} (x + y)^2 - 2xy = 10; \\ xy = 3. \end{cases}$$

Яңа билгесезләр кертәбез: $4 = x + y$; $v = xy$:

$$\begin{cases} u^2 - 2v = 10; \\ v = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 = 16; \\ v = 3. \end{cases}$$

Моннан $u_1 = 4$; $u_2 = -4$; $v_1 = 3$; $v_2 = 3$.

x һәм y ны табу өчен ике система чишәргә кирәк:

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ xy = 3. \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = -4; \\ xy = 3. \end{cases}$$

Бу системалар алыштыру методы белән җайлы эшләнәләр.

Өченче ысул (алгебраик кушу методы). Икенче тигезләмәне 2 гә тапкырлап, беренче тигезләмәгә кушабыз. $x^2 + 2xy + y^2 = 10 + 6 \Leftrightarrow (x + y)^2 = 16 \Leftrightarrow x + y = \pm 4.$

Икенче тигезләмәне -2 гә тапкырлап, беренче тигезләмәгә кушабыз: $x^2 - 2xy + y^2 = 10 - 6 \Leftrightarrow (x - y)^2 = 4 \Leftrightarrow x - y = \pm 2.$

Баштагы система түбәндәге системалар җыелмасына эквивалент:

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ x - y = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 4, \\ x - y = -2, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -4, \\ x - y = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -4, \\ x - y = -2. \end{cases}$$

Моннан соңгы чишелешләр җиңел башкарыла.

Дүртенче ысул. Икенче тигезләмәне квадратка күтәрәбез:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ x^2y^2 = 9. \end{cases}$$

Биредә x^2 һәм y^2 ны квадрат тигезләмәнең тамырлары дип карарга була (Виет теоремасының киресе): $t_1 = 1$, $t_2 = 9$. Бу система түбәндәге системалар җыелмасына эквивалент:

$$\begin{cases} x^2 = 1; \\ y^2 = 9; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 = 9; \\ y^2 = 1. \end{cases}$$

Бу системалар җыелмасының сигез чишелеше бар: $(1;\ 3)$, $(1;\ -3)$, $(-1;\ 3)$, $(-1;-3)$, $(3;\ 1)$, $(3;-1)$, $(-3;\ 1)$, $(-3;-1)$. Тамгалары бер үк булмаган саннар парлары тигезләмәнең чит тамырлары була; алар икенче тигезләмәне квадратка күтәргәндә, ягъни эквивалент булмаган рәвешүзгәртү нәтиҗәсендә барлыкка киләләр.

Бишенче ысул. Беренче тигезләмәне 3 кә, икенчесен -10 га тапкырлап һәм аларны кушып табабыз: $3x^2 + 3y^2 - 10xy = 0$. Бу тигезләмәне $x^2 \neq 0$ ка бүләбез: $3\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 10\left(\frac{y}{x}\right) + 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{1}{3}$; $\frac{y}{x} = 3.$

Хәзер түбәндәге ике системаны чишәсе кала:

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{1}{3}, \\ xy = 3. \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{y}{x} = 3, \\ xy = 3. \end{cases}$$

Беренче системада тигезләмәләрне тапкырлыйбыз: $y^2 = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow y = \pm 1$ (бу вакытта $x = \pm 3$).

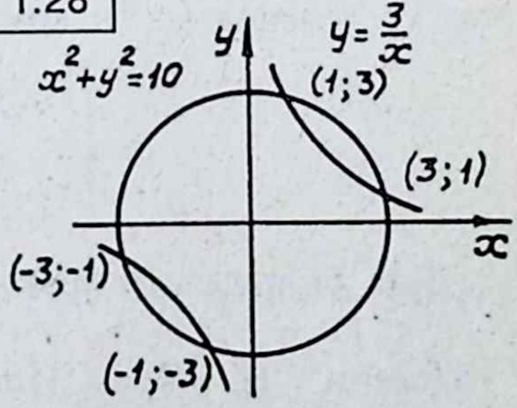
Икенче системаны чишәбез: $y = \pm 3(x = \pm 1)$. Монда бер үк тамгалы комбинацияләр генә булуы мөмкин. Системаның чишелешен геометрик яктан ачык күз алдына китерергә мөмкин: беренче тигезләмә — үзәге координаталар башлангычында, радиусы $\sqrt{10}$ булган әйләнәне, икенчесе — тигезьянлы гиперболаны бирә.

Системаның чишелеше — әйләнә белән гипербола кисешү нокталарының координатлары (1.28 рәс.).

б) Системаны чишегез: $\begin{cases} 2x^3 + 3y^3 = 5, \\ xy = 1. \end{cases}$

Чишү. Икенче тигезләмәдән $y = \frac{1}{x}$ була. Моны беренче тигезләмәгә куеп үзгәртәбез: $2x^6 - 5x^3 + 3 = 0$. x^3 ны t га алыштырсак, билгесезе t булган квадрат тигезләмә килеп чыга: $2t^2 - 5t + 3 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{3}{2}$, $t_2 = 1$. Моннан $x_1 = \sqrt[3]{1,5}$; $x_2 = 1$; $y_2 = 1$; $y_1 = \sqrt[3]{2/3}$.

1.28



Җавап. $\left(\sqrt[3]{\frac{3}{2}};\ \sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)$; $(1;\ 1)$.

в) Системаны чишегез: $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7; \\ xy = -2. \end{cases}$

Чишү. Икенче тигезләмәнең ике ягын да кубка күтәреп, эквивалент (ни өчен?) система табабыз: $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7; \\ x^3y^3 = -8. \end{cases}$

Биредә x^3 һәм y^3 ны квадрат тигезләмәнең тамырлары дип карап була: $t^2 - 7t - 8 = 0$, $t_1 = -1$, $t_2 = 8$.

Системалар җыелмасын чишәсе кала:

$$\begin{cases} x^3 = -1; \\ y^3 = 8. \end{cases} \qquad \begin{cases} x^3 = 8; \\ y^3 = -1. \end{cases}$$

Җавап. $(-1;\ 2)$, $(2;\ -1)$.

Түбәндә билгесезләрне стандарт алыштырырга мөмкинлек бирүче берничә төр система карыйк.

1. *Симметрик тигезләмәләр системасы*. Әгәр системаның һәр тигезләмәсе x ны y ка һәм y ны x ка алыштырган очракта үзгәрмәсә, андый система симметрик система дип атала (монда һәр тигезләмә билгесезләргә карата симметрияле була). Андый системаларны $u = x + y$, $v = xy$ рәвешле яңа билгесезләр кертеп чишәргә мөмкин.

Мисаллар. а) Системаны чишегез: $\begin{cases} xy(x+1)(y+1) = 72; \\ (x-1)(y-1) = 2. \end{cases}$

Чишү. Бу симметрик система, шуның өчен ул симметрик $x + y$ һәм xy буыннарының комбинациясен эченә алырга тиеш:

$$\begin{cases} xy(xy + x + y + 1) = 72; \\ xy - (x + y) + 1 = 2. \end{cases}$$

Яңа билгесезләр кертәбез: $u = x + y$, $v = xy$.

$$\begin{cases} v(v + u + 1) = 72; \\ v - u + 1 = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v(v + u + 1) = 72; \\ v = u + 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2v(u + 1) = 72, \\ v = u + 1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1 + u)^2 = 36, \\ v = u + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + 1 = \pm 6 \\ v = u + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 5 \\ v_1 = 6 \end{cases} \begin{cases} u_2 = -7, \\ v_2 = -6. \end{cases}$$

Димәк, элекке система ике система җыелмасына тигезкөчле:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6, \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = -7, \\ xy = -6. \end{cases}$$

Беренче системаның ике чишелеше бар: (2; 3), (3; 2).

Икенче системаның шулай ук ике чишелеше бар: $\left(\frac{-7+\sqrt{73}}{2};\ \frac{-7-\sqrt{73}}{2}\right)$; $\left(\frac{-7-\sqrt{73}}{2};\ \frac{-7+\sqrt{73}}{2}\right)$.

Җавап. (2; 3), (3; 2). $\left(\frac{-7+\sqrt{73}}{2};\ \frac{-7-\sqrt{73}}{2}\right)$; $\left(\frac{-7-\sqrt{73}}{2};\ \frac{-7+\sqrt{73}}{2}\right)$.

б) Системаны чишегез: $\begin{cases} x^4 + y^4 = 82; \\ x + y = 2. \end{cases}$

Чишү. Беренче тигезләмәнең сул ягының рәвешен үзгәртәбез: $x^4 + y^4 = \left(x^2 + y^2\right)^2 - 2x^2y^2 = \left((x + y)^2 - 2xy\right)^2 - 2x^2y^2 = (x + y)^4 - 4xy(x + y)^2 + 4x^2y^2 - 2x^2y^2$. Хәзер система болай языла: $\begin{cases} (x + y)^4 - 4xy(x + y)^2 + 2x^2y^2 = 82; \\ x + y = 2. \end{cases}$

Икенче тигезләмәне исәпкә алсак: $\begin{cases} (xy)^2 - 8(xy) - 33 = 0, \\ x + y = 2. \end{cases}$

Соңгы система ике система җыелмасына эквивалент:

$$\begin{cases} xy = 11, \\ x + y = 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} xy = -3, \\ x + y = 2; \end{cases}$$

Беренче системаның тигезләмәләре тамырдаш түгел, ә икенче системаның чишелеше: $(-1; 3)$, $(3; -1)$.

Җавап: $(-1; 3)$, $(3; -1)$.

Шуны игътибарга алыйк: беренчедән, симметрик системаларның чишелешендә саннар парлы, һәрвакыт җөп санга тигез, икенчедән, һәр ике парның икенчесен беренче пардагы билгесезләрнең кыйммәтләренең урыннарын алыштырып табарга мөмкин.

2. *Билгесез x һәм y ны аерым комбинацияләр рәвешендә бәйләгән тигезләмәләр системасы.*

Системаны чишегез: $\begin{cases} \frac{(x+y)x}{y} = 20; \\ x + y + \frac{x}{y} = 9. \end{cases}$

Чишү. МТӨ: $y \neq 0$. Бу системаның тигезләмәләре $x + y$ һәм $\frac{x}{y}$ рәвешле комбинацияләрдән тора, шуның өчен аларны яңа билге-

сезләр дип алсак (ягъни $u = x + y$, $v = x/y$ булса), система түбәндәгечә языла: $\begin{cases} uv = 20, \\ u + v = 9. \end{cases}$

Системаның чишелеше $u_1 = 4$, $v_1 = 5$ һәм $u_2 = 5$, $v_2 = 4$. Шулай итеп, x һәм y ны табу өчен ике система җыелмасы табабыз:

$$\begin{cases} x + y = 4; \\ \frac{x}{y} = 5. \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 5; \\ \frac{x}{y} = 4. \end{cases}$$

Җавап. $(4; 1)$, $\left(\frac{10}{3}; \frac{2}{3}\right)$

3. *Тигезләмәләр системасында* x *һәм* y xy, $x - y$, $x^2 + y^2$, $x^3 - y^3$, *комбинацияләре рәвешендә булсалар,* $x - y = u$, $xy = v$ *рәвешле алыштыру мөмкин.*

Мисал. Системаны чишегез: $\begin{cases} 8\left(x^2 + xy + y^2\right) = (x - y)^3; \\ 2\left(x^2 - xy + y^2\right) = 3(x - y). \end{cases}$

Чишү. Системаның рәвешен үзгәртәбез:

$$\begin{cases} 8\left(x^2 + 2xy + y^2 + 3xy\right) = (x - y)^3, \\ 2\left(x^2 - 2xy + y^2 + xy\right) = 3(x - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8\left((x - y)^2 + 3xy\right) = (x - y)^3 \\ 2\left((x - y)^2 + xy\right) = 3(x - y). \end{cases}$$

Яңа билгесезләр кертәбез: $u = x - y$, $v = xy$

$$\begin{cases} 8\left(u^2 + 3v\right) = u^3, \\ 2\left(u^2 + v\right) = 3u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8\left(u^2 + 3v\right) = u^3, \\ v = \frac{3u - 2u^2}{2}. \end{cases}$$

Табылган v ны беренче тигезләмәгә куябыз: $8\left(u^2 + 3\,\frac{3u - 2u^2}{2}\right) = u^3$

яки $u^3 + 16u^2 - 36u = 0$.

Соңгы тигезләмәнең тамырлары: $u_1 = 0$, $u_2 = 2$, $u_3 = -18$, ә болардан $v_1 = 0$, $v_2 = -1$, $v_3 = -351$. Шулай итеп, өч системадан торган җыелмага күчәбез:

$$\begin{cases} x-y=0, \\ xy=0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y=2, \\ xy=-1. \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y=-18, \\ xy=-351. \end{cases}$$

Җавап. (0; 0), (1; 1).

4. $\begin{cases} f_1(x,y)=0, \\ f_2(x,y)=\varphi_2(x,y) \end{cases}$ *рәвешле система.*

Монда $f_1(x,y)$ x һәм y ка карата бериш функция (әгәр $F(\alpha x,\alpha y)=\alpha^k F(x,y)$, ягъни $F(x,y)$ тигезләмәсендә x ны αx ка, y ны αy ка алыштыру $F(x,y)$ ны α^k ка тапкырлауга тигезкөчле булса, $F(x,y)$ x һәм у ка карата k дәрәҗәле бериш функция дип атала). Мәсәлән, $F(x,y)=x^2+xy+y^2$ x һәм y ка карата икенче дәрәҗә бериш функция, ягъни $F(\alpha x,\alpha y)=(\alpha x)^2+(\alpha x)(\alpha y)+(\alpha y)^2=$ $=\alpha^2\left(x^2+xy+y^2\right)=\alpha^2 F(x,y)$.

Бу очракта $y=tx$ дип билгеләсәк, беренче тигезләмә бер билгесезле тигезләмәгә әверелә. Монда шуны истә тотарга кирәк, әгәр $x=0$, $y=0$ булса, тамырларның югалуы мөмкин.

Мисал. Системаны чишегез: $\begin{cases} 2x^2-3xy-2y^2=0, \\ x^2+4y^2=8. \end{cases}$

Чишү. Беренче тигезләмәнең сул ягы икенче дәрәҗә бериш функция. $x=0$, $y=0$ икенче тигезләмәнең тамыры булмаганлыктан, бу пар системаның да тамыры булмый. Шулай булгач, $y=tx$ алыштырмасы тамырларның югалуына китерми: $2x^2-3xtx-2(tx)^2=0$, $2-3t-2t^2=0 \Rightarrow t_1=-2,\ t_2=\frac{1}{2}$.

Димәк, системаның беренче тигезләмәсе $y=-2x$, $y=-\frac{1}{2}x$ тигезләмәләренә тигезкөчле, ә баштагы система ике системага эквивалент:

$$\begin{cases} y = -2x; \\ x^2 + 4y^2 = 8, \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \frac{1}{2}x, \\ x^2 + 4y^2 = 8. \end{cases}$$

Моннан дүрт чишелеш табабыз.

Җавап. $\left(2\sqrt{\frac{2}{17}}; -4\sqrt{\frac{2}{17}}\right)$;

$\left(-2\sqrt{\frac{2}{17}}; 4\sqrt{\frac{2}{17}}\right)$; $(2; 1)$; $(-2; -1)$.

5. $\begin{cases} f_1(x, y) = a, \\ f_2(x, y) = b \end{cases}$ *рәвешле система.*

Биредә $f_1(x, y)$ һәм $f_2(x, y)$ x һәм y ка карата бер үк дәрәҗәле бериш функцияләр.

Мисаллар. а) Системаны чишегез: $\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = 36; \\ 3x^2y + y^3 = -28. \end{cases}$

Чишү. Бу тигезләмәләрнең сул яклары x һәм y ка карата өченче дәрәҗә бериш функцияләр.

Шуның өчен болай эшлибез: беренче тигезләмәне 7 гә, икенчесен 9 га тапкырлап, аларны кушабыз.

$$7x^3 + 21xy^2 + 27x^2y + 9y^3 = 0 \text{ яки } 7t^3 + 27t^2 + 21t + 9 = 0,$$

биредә $t = \frac{x}{y}$.

Тигезләмәнең бөтен тамырларын ирекле буынның бүлүчеләре арасыннан эзлибез: ± 1, ± 3, ± 9. -3 саны тигезләмәнең тамыры икәнен тикшереп беләбез. Безу теоремасын кулланып, тигезләмәне таркатабыз: $7t^3 + 27t^2 + 21t + 9 = 0 \Leftrightarrow (t + 3)\left(7t^2 + 6t + 3\right) = 0 \Rightarrow t = -3$.

Хәзер түбәндәге системаны эшлисе кала:

$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = 36; \\ x = -3y \end{cases} \Rightarrow -36y^3 = 36 \Rightarrow y = -1.$$

Җавап. $(3; -1)$.

Абсолют зурлык тамгасы астында билгесезләр булган тигезләмәләр системасын карыйк.

Мисал. Системаны чишегез: $\begin{cases} |x| + |y| = 12, \\ y^3 - x^2 = 0. \end{cases}$

Чишү. Икенче тигезләмәдән: $y = \sqrt[3]{x^2}$. Ул вакытта беренче тигезләмә түбәндәге рәвешкә керә: $|x| + \left|\sqrt[3]{x^2}\right| - 12 = 0 \Leftrightarrow |x| + \sqrt[3]{x^2} - 12 = 0$.

Бу тигезләмә ике тигезләмә җыелмасына тигезкөчле:

1) $x + \sqrt[3]{x^2} - 12 = 0$, $x \geq 0$ булса,

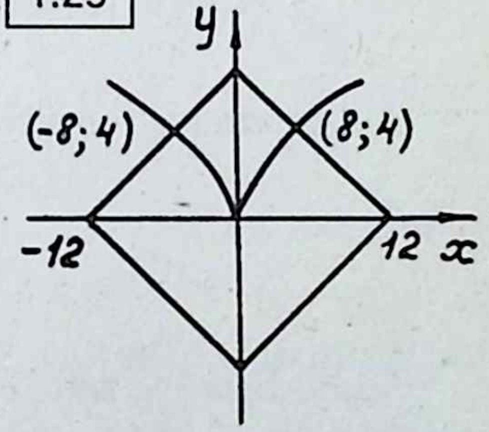
2) $-x + \sqrt[3]{x^2} - 12 = 0$, $x < 0$ булса,

$\sqrt[3]{x} = t$ дип билгеләп, беренче тигезләмәдән $t^3 + t^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (t-2)\left(t^2 + 3t + 6\right) = 0 \Rightarrow t = 2$ икәнен табабыз. Димәк, $x = 8$, $y = 4$. Икенче тигезләмәдән: $x = -8$, $y = 4$.

Җавап. (8; 4), (−8; 4).

Искәрмә. 1.29 рәсемендә тигезләмәләр белән бирелә торган кәкре сызыклар сурәтләнгән. Аннан күренгәнчә, төп тигезләмә бары тик ике генә чишелешкә ия.

1.29



Хәзер өч билгесезле өч тигезләмәдән торган системаның чишелешен карыйбыз.

Мисаллар. а) Системаны чишегез:

$$\begin{cases} x + yz = 2; \\ y + xz = 2; \\ z + xy = 2. \end{cases}$$

Чишү. Беренче тигезләмәдән икенче тигезләмәне алабыз:

$$x - y - z(x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)(1 - z) = 0 \Rightarrow x = y, \ z = 1.$$

Шулай итеп, төп система ике система җыелмасына тигезкөчле:

$$\begin{cases} x = y; \\ y + xz = 2; \\ z + xy = 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} z = 1; \\ y + xz = 2; \\ z + xy = 2. \end{cases}$$

Беренче системада алмаштыру эшлибез: $\begin{cases} y + yz = 2, \\ z + y^2 = 2. \end{cases}$

Беренче тигезләмәдән икенчесен алабыз: $y(1-y) + z(y-1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (y-z)(y-1) = 0 \Rightarrow y_1 = 1,\ y_2 = z;$ x, y, z не табу өчен ике система җыелмасын таптык:

$$\begin{cases} y = 1, \\ x = y, \\ y + xz = 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} y = z, \\ x = y, \\ y + xz = 2. \end{cases}$$

Беренче системадан $x = 1,\ y = 1,\ z = 1$ була, ә икенчедән $x + x^2 = 2$, моннан $x_1 = -2,\ x_2 = 1,\ y_1 = -2,\ y_2 = 1,\ z_1 = -2,\ z_2 = 1.$ Икенче система түбәндәге системага тигезкөчле:

$$\begin{cases} y + x = 2, \\ 1 + xy = 2, \\ z = 1, \end{cases} \Rightarrow x = y = z = 1.$$

Җавап. $(-2; -2, -2)$, $(1, 1, 1)$.

б) Системаны чишегез: $\begin{cases} x + y + z = 6; \\ x(y+z) = 5; \\ y(x+z) = 8. \end{cases}$

Чишү. Беренче тигезләмәдән $y + z = 6 - x$ икәнен табып, икенче тигезләмәгә куябыз: $x(6-x) = 5$. Моннан $x_1 = 1,\ x_2 = 5$ була. Шулай итеп, төп система ике система җыентыгына тигезкөчле:

$$\begin{cases} x = 1; \\ y + z = 5; \\ y(1+z) = 8. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 5; \\ y + z = 1; \\ y(5+z) = 8. \end{cases}$$

Беренче системаның ике чишелеше: (1, 4, 1), (1, 2, 3), икенче системаның ике чишелеше бар: $(5, 4, -3)$, $(5, 2, -1)$.

Җавап. (1, 4, 1); (1, 2, 3); $(5, 4, -3)$; $(5, 2, -1)$.

в) Системаны чишегез: $\begin{cases} x + y + z = 2; \\ 2x + 3y + z = 1; \\ x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 9. \end{cases}$

Чишү. Беренче ике тигезләмәдән x һәм y ны z аша табып, аларны өченче тигезләмәгә куябыз: $y = z - 3$, $x = 5 - 2z$,

$z^2 - 4z + 3 = 0 \Rightarrow z_1 = 1,\ z_2 = 3 \Rightarrow y_1 = -2,\ x_1 = 3,\ y_2 = 0,\ x_2 = -1.$

Җавап. $(3, -2, 1)$;

$(-1, 0, 3)$.

г) Системаны чишегез: $\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 3; \\ \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} = 3; \\ x + y + z = 3. \end{cases}$

Чишү. МТӨ: $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$. Беренче ике тигезләмәнең һәр ягын xyz ка тапкырлап, тигезкөчле система табабыз:

$$\begin{cases} x^2z + xy^2 + yz^2 = 3xyz; \\ y^2z + xz^2 + x^2y = 3xyz; \\ x + y + z = 3. \end{cases}$$

Беренче тигезләмәне y ка, икенчесен $-z$ ка тапкырлап, алар- ны кушабыз: $x(y^3 - z^3) = 3xyz(y - z) \Leftrightarrow (y - z)(y^2 + yz + z^2) = 3yz(y - z)$. Моннан $y = z$ була. Шул ук юл белән табабыз: $x = z$, $y = x$. Системаның өченче тигезләмәсеннән $3x = 3$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ килеп чыга.

Җавап. $(1, 1, 1)$.

д) Системаны чишегез: $\begin{cases} x + y + z = 2; \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6; \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8. \end{cases}$

Чишү. Системаны түбәндәге рәвештә язабыз:

$$\begin{cases} x + y = 2 - z; \\ x^2 + y^2 = 6 - z^2; \\ x^3 + y^3 = 8 - z^3. \end{cases}$$

Соңгы тигезләмәне таркатабыз: $(x + y)\left(x^2 - xy + y^2\right) = (2 - z)\left(4 + 2z + z^2\right)$.

Әгәр $z \neq 2$ булса, төп система түбәндәге системага тигезкөчле:

$$\begin{cases} x + y = 2 - z; \\ x^2 + y^2 = 6 - z^2; \\ x^2 - xy + y^2 = 4 + 2z + z^2. \end{cases}$$

Беренче тигезләмәне квадратка күтәрәбез: $x^2 + 2xy + y^2 = 4 - 4z + z^2$, икенче тигезләмәне кулланып, беренче һәм өченче тигезләмәләрдән түбәндәге системаны табарга мөмкин:

$$\begin{cases} 2xy + 6 - z^2 = 4 - 4z + z^2; \\ -xy + 6 - z^2 = 4 + 2z + z^2. \end{cases}$$

Икенче тигезләмәне 2 гә тапкырлап, бу тигезләмәләрне кушабыз: $18 - 3z^2 = 12 + 3z^2 \Rightarrow z^2 = 1 \Rightarrow z = \pm 1$. x һәм y ны табу өчен алдагы өч тигезләмәле системадан ике система җыелмасы хасил була:

$$\begin{cases} z = -1; \\ x + y = 3; \\ x^2 + y^2 = 5; \\ x^2 + y^2 - xy = 3, \end{cases} \qquad \begin{cases} z = 1; \\ x + y = 1; \\ x^2 + y^2 = 5; \\ x^2 + y^2 - xy = 7, \end{cases} \text{ягъни}$$

$$\begin{cases} z = -1; \\ x + y = 3; \\ xy = 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} z = 1; \\ x + y = 1; \\ xy = -2. \end{cases}$$

Моннан чишелешләрне табабыз: $(2, +1, -1)$; $(1, 2, -1)$; $(2, -1, 1)$ $(-1, 2, 1)$. Тикшереп карап, бу чишелешләрнең баштагы системаны канәгатьләндерүен беләбез. Әгәр $z = 2$ булса, төп система түбәндәге системага тигезкөчле: $\begin{cases} x + y = 0; \\ x^2 + y^2 = 2; \\ z = 2. \end{cases}$

Моннан: $x_1 = 1$, $y_1 = -1$, $x_2 = -1$, $y_2 = 1$.

Җавап. $(1, 2, -1)$; $(2, 1, -1)$;
$(2, -1, 1)$; $(-1, 2, 1)$;
$(1, -1, 2)$; $(-1, 1, 2)$.

Күнегүләр

1. $\begin{cases} xy - \frac{x}{y} = \frac{16}{3}; \\ xy - \frac{y}{x} = \frac{9}{2}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + xy + y = 11; \\ x^2y + xy^2 = 30. \end{cases}$

3. $\begin{cases} xy(x + y) = 30; \\ x^3 + y^3 = 35. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{36}; \\ xy^2 - x^2y = 324. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 19; \\ (xy + 8)(x + y) = 2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^4 + y^4 = 17; \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x^2 - 4xy + y^2 = 0; \\ x^2 + 2y^2 = 19. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^6 + y^6 = 65; \\ x^4 - x^2y^2 + y^4 = 13. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^3/y + xy = 40; \\ y^3/x + xy = 10. \end{cases}$

10. $\begin{cases}(x+1)^2(y+1)^2 = 27xy; \\ (x^2+1)(y^2+1) = 10xy.\end{cases}$

11. $\begin{cases}x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = 136; \\ x^3y + xy^3 = 30.\end{cases}$

12. $\begin{cases}\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{x}{y}\right)^3 = 12; \\ (xy)^2 + xy = 6.\end{cases}$

13. $\begin{cases}8x + \frac{8}{y} = 3y^2; \\ y + \frac{1}{x} = 3x^2.\end{cases}$

14. $\begin{cases}2x^3 + 3y^2 = 83; \\ xy = 3.\end{cases}$

15. $\begin{cases}xy + \frac{y}{x} = 2(x^2 + y^2); \\ xy - \frac{x}{y} = x^2 + y^2.\end{cases}$

16. $\begin{cases}3|x+1| + |y-2| = 12; \\ x - |y-2| + 1 = 0.\end{cases}$

17. $\begin{cases}y - x|x| = 1; \\ |y-1| + x = 2.\end{cases}$

18. $\begin{cases}\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3; \\ \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} = 3; \\ \frac{1}{xyz} = 1.\end{cases}$

19. $\begin{cases}\frac{3}{xy} + \frac{15}{yz} = 2; \\ \frac{15}{yz} + \frac{5}{xz} = 2; \\ \frac{5}{xz} + \frac{3}{xy} = 2.\end{cases}$

20. $\begin{cases}x + y + z = 3; \\ x + 2y - z = 2; \\ x + yz + xz = 3.\end{cases}$

21. $\begin{cases}x + y + z = 0; \\ 2x + 3y + z = 0; \\ (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 14.\end{cases}$

22. $\begin{cases}2x + y + z = 0; \\ 3x + 2y + z = 0; \\ 3(x+2)^3 + 2(y+1)^3 + (z+1)^3 = 27.\end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x + y + z = 6; \\ 3x + 2y + z = 7; \\ (x-1)^3 + (y+2)^3 + (z-3)^3 = 7. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x - y + z = 6; \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14; \\ x^3 - y^3 + z^3 = 36. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x + y + z = 6; \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1,5; \\ xyz = 8. \end{cases}$

Җаваплар

1. $\{(2,\ 3),\ (-2, -3)\}$.

2. $\{(5,\ 1),\ (1,\ 5),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2)\}$.

3. $\{(2,\ 3),\ (3,\ 2)\}$.

4. $\{(9,\ 12),\ (-12, -9)\}$.

5. $\{(-2,\ 3),\ (3, -2)\}$.

6. $\{(2,\ 1),\ (1,\ 2),\ (-2,\ 1),\ (1, -2),\ (2, -1),\ (-1,\ 2),\ (-2, -1),\ (-1, -2)\}$.

7. $\left\{\left(\sqrt{\frac{19}{3}};\ \sqrt{\frac{19}{3}}\right),\ \left(-\sqrt{\frac{19}{3}};\ -\sqrt{\frac{19}{3}}\right),\ (1,\ 3),\ (-1, -3)\right\}$.

8. $\{(2,\ 1),\ (-2, -1),\ (2, -1),\ (-2,\ 1),\ (1,\ 2),\ (-1, -2),\ (1, -2),\ (-1, 2)\}$.

9. $\{(4,\ 2),\ (-4, -2)\}$.

10. $\left\{\left(2 + \sqrt{3};\ 2\right),\ \left(2 - \sqrt{3};\ 2\right),\ \left(2 + \sqrt{3};\ \frac{1}{2}\right);\ \left(2 - \sqrt{3};\ \frac{1}{2}\right),\ \left(2;\ 2 + \sqrt{3}\right),\right.$
$\left.\left(2;\ 2 - \sqrt{3}\right),\ \left(0,5;\ 2 + \sqrt{3}\right),\ \left(0,5;\ 2 - \sqrt{3}\right)\right\}$.

11. $\{(3,\ 1),\ (1,\ 3),\ (-1, -3),\ (-3, -1)\}$.

12. $\{(2,\ 1),\ (-2, -1)\}$.

13. $(1,\ 2)$.

14. $\left\{(1,\ 3),\ \left(3\sqrt[3]{1,5};\ \sqrt[3]{2/3}\right)\right\}$.

15. Чишелеше юк.

16. $\{(2, -1),\ (2,\ 5)\}$.

17. $\{(1,\ 2),\ (-2, -3)\}$.

18. $(1,\ 1,\ 1)$.

19. $\{(-1, -3, -5), (1, 3, 5)\}$. 20. $\{(1, 1, 1), (7, -3, -1)\}$.

21. $\{(0, 0, 0), (2, -1, -1)\}$. 22. $\{(0, 0, 0), (-1, 1, 1)\}$.

23. $\left\{(3; -2, 2), \left(\frac{9\pm3\sqrt{5}}{2}; \frac{-7\pm3\sqrt{5}}{2}; \frac{1\pm3\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$.

24. $\{(1, -2, 3), (1, -3, 2), (2, -1, 3), (2, -3, 1), (3, -1, 2), (3, -2, 1)\}$.

25. $(2, 2, 2)$.

6.4. Иррациональ тигезләмәле системалар

Системада очрый торган җөп дәрәҗәле радикаллар арифметик мәгънәдә кабул ителәләр: $f(x, y) \geq 0$ булганда $\sqrt{f(x, y)} \geq 0$ була. $f(x, y) \geq 0$ тигезсезлеге x һәм y өчен МТӨ билгеле.

Мисаллар. а) $\begin{cases} \sqrt{\frac{3x}{x+y}} - 2 + \sqrt{\frac{x+y}{3x}} = 0; \\ xy - x - y = 54. \end{cases}$

Чишү. МТӨ: $\frac{x}{x+y} > 0$. $\sqrt{\frac{3x}{x+y}} = t \geq 0$ булсын. Ул вакытта системаның беренче тигезләмәсе түбәндәге рәвешкә килә: $t + \frac{1}{t} - 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = 1$.

Нәтиҗәдә эквивалент система табабыз:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{3x}{x+y}} = 1, \\ xy - x - y = 54. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x, \\ xy - x - y = 54 \end{cases} \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 54 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_1 = 6, \ x_2 = -\frac{9}{2}$.

Җавап. (6, 12), (– 9/2, – 9).

б) $\begin{cases} x^2 - x + y = -22; \\ 8\sqrt{x^2 - y^2} = x + 9y. \end{cases}$

Чишү. МТӨ: $x^2 - y^2 \ge 0$. Икенче тигезләмә барлык $x + 9y \ge 0$ өчен түбәндәге тигезләмәгә эквивалент: $63x^2 - 18xy - 145y^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 63\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 18\left(\frac{x}{y}\right) - 145 = 0 \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)_1 = \frac{5}{3}; \ \left(\frac{x}{y}\right)_2 = -\frac{29}{21}.$$

Төп система ике система җыелмасына эквивалент:

$$\begin{cases} y = \frac{3}{5}x; \\ x^2 - x + y = -22 \end{cases} \Rightarrow x^2 - \frac{2}{5}x + 22 = 0 \Rightarrow \varnothing.$$

$$\begin{cases} y = -\frac{21}{29}x; \\ x^2 - x + y = -22 \end{cases} \Rightarrow x^2 - \frac{50}{29}x + 22 = 0 \Rightarrow \varnothing.$$

Җавап. Чишелеше юк.

в) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{7}{\sqrt{xy}} + 1; \\ \sqrt{x^3y} + \sqrt{xy^3} = 78. \end{cases}$

Чишү. МТӨ: $xy > 0$. Беренче тигезләмәнең ике ягын да $\sqrt{xy} > 0$ тапкырлап табабыз: $\sqrt{xy}\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{xy}\sqrt{\frac{y}{x}} = 7 + \sqrt{xy} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = 7 + \sqrt{xy} \Leftrightarrow |x| + |y| = 7 + \sqrt{xy}$.

Икенче тигезләмәгә тигезкөчле тигезләмә язабыз: $\sqrt{xy}\left(|x| + |y|\right) = 78$. Шулай итеп, эквивалент системага күчәбез:

$$\begin{cases} |x| + |y| = 7 + \sqrt{xy}, \\ \sqrt{xy}\left(|x| + |y|\right) = 78. \end{cases}$$

Беренче тигезләмәдән файдаланып, икенче тигезләмәне үзгәртәбез: $xy + 7\sqrt{xy} - 78 = 0 \Rightarrow \sqrt{xy} = 6$. Икенче тигезләмәне янәшә куеп, система табабыз:

$$\begin{cases} |x| + |y| = 13, \\ \sqrt{xy} = 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| + |y| = 13, \\ xy = 36. \end{cases}$$

Монда ике мөмкинлек бар.

1. $x > 0$ һәм $y > 0$ булсын. Бирелгән системаның симметрик булуын искә алсак: $x_1 = 9$, $y_1 = 4$, $x_2 = 4$; $y_2 = 9$ була.

2. $x < 0$ һәм $y < 0$ булганда чишелеш түбәндәгечә: $x_3 = -9$, $y_3 = -4$, $x_4 = -4$, $y_4 = -9$.

Җавап. (9, 4); (4, 9), (–9, – 4), (–4, – 9).

г) $$\begin{cases} x^2 + x\sqrt[3]{xy^2} = 80, \\ y^2 + y\sqrt[3]{x^2y} = 5. \end{cases}$$

Чишү. МТӨ: $x, y \in R$. Бу тигезләмәләрнең сул яклары икенче дәрәҗә бериш функцияләр. Икенче тигезләмәне 16 га тапкырлап, беренче тигезләмәдән алабыз: $x^2 + x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}} - 16y^2 - 16x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}} = 0$.

Барлык буыннарны $y^2 \neq 0$ гә бүләбез: $\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{4}{3}} - 16 - 16\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{2}{3}} = 0.$

Әйтик, $\frac{x}{y} = t^3$ булсын. Ул вакытта билгесезе t булган тигезләмәгә күчәбез: $t^6 + t^4 - 16\left(t^2 + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left(t^2 + 1\right)\left(t^4 - 16\right) = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \pm 2.$

x һәм y ны табу өчен ике системаны чишәргә кирәк:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = 8; \\ x^2 + x\sqrt[3]{xy^2} = 80. \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x}{y} = -8; \\ x^2 + x\sqrt[3]{xy^2} = 80. \end{cases}$$

Җавап. (8, 1), (–8, – 1), (–8, 1), (8, – 1).

д) $$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{2xy} = 8\sqrt{2}; \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \end{cases}$$

Чишү. МТӨ: $x \geq 0$, $y \geq 0$. Монда беренче тигезләмәнең сул ягы x һәм y ка карата беренче дәрәҗә бериш функция, ә икенче тигезләмә андый түгел. Ләкин, аның ике ягын да квадратка күтәреп, төп системага эквивалент система табабыз.

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}=8\sqrt{2};\\ x+y+2\sqrt{xy}=16.\end{cases}$$

Беренче тигезләмәне $\sqrt{2}$ гә тапкырлап, аннан икенче тигезләмәне алабыз: $\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}-(x+y)=0 \Leftrightarrow \sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}=x+y$. Ике ягын да квадратка күтәреп үзгәртәбез: $(x-y)^2=0 \Rightarrow x=y$. Төп системаның беренче тигезләмәсе $2\sqrt{2}x=8\sqrt{2}$ рәвешен ала.

Җавап. (4, 4).

е) $$\begin{cases}\left(13x^4y^2-6x^2-6y\right)x\sqrt{y}=356;\\ \left(5x^4y^2-6x^2-6y\right)x\sqrt{y}=100.\end{cases}$$

Чишү. МТӨ: $x\in R,\ y\in R_+$. Беренче тигезләмәдән икенче тигезләмәне алып табабыз: $8x^4y^2x\sqrt{y}=256 \Leftrightarrow \left(x\sqrt{y}\right)^5=32 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x\sqrt{y}=2$. Бу аңлатманы икенче тигезләмәгә куеп үзгәртәбез: $x^2+y=5$. Түбәндәге системаны чишәбез: $\begin{cases}x\sqrt{y}=2;\\ x^2+y=5.\end{cases}$

Җавап. (2, 1), (1, 4).

ж) $$\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x}}{y}=\dfrac{3}{8};\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=7.\end{cases}$$

Чишү. МТӨ: $x\geq 0,\ y>0$. $\dfrac{1}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x}\right)}=$ $=\dfrac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x}}{y}$ булганлыктан, төп система болай языла: $\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{x}}{y}=\dfrac{3}{8};\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=7.\end{cases}$

Беренче тигезләмә $\sqrt{x} = \frac{3}{16}y$, ә икенче тигезләмә түбәндәге рәвешкә керә: $\frac{3}{16}y + \sqrt{y} = 7 \Rightarrow 3t^2 + 16t - 112 = 0 \Rightarrow t_1 = 4$, монда $t = \sqrt{y}$. Шуның өчен $t > 0$, $y = 16$ булганда, $x = \left(\frac{3\cdot 16}{16}\right)^2 = 9$.

Җавап. (9, 16).

з) Системаны чишегез: $\begin{cases} \sqrt{xy} - \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1; \\ x\sqrt{y} - y\sqrt{x} = 2. \end{cases}$

Чишү. МТӨ: $x \geq 0$, $y \geq 0$. Яңа билгесезләр кертәбез: $u = \sqrt{xy}$, $v = \sqrt{y} - \sqrt{x}$. Система түбәндәге рәвешне ала: $\begin{cases} u + v = 1 \\ uv = 2. \end{cases}$ Моннан $u_1 = 2$, $u_2 = -1$, $v_1 = -1$, $v_2 = 2$. u тискәре булмаганлыктан, төп тигезләмәләр системасы түбәндәге системага эквивалент:

$$\begin{cases} \sqrt{xy} = 2; \\ \sqrt{y} - \sqrt{x} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 4; \\ y + x - 2\sqrt{xy} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 4; \\ x + y = 5. \end{cases}$$

Җавап. (4, 1).

и) Системаны чишегез: $\begin{cases} \sqrt{x - y} + \sqrt{y} + \sqrt{z + 4} = 6; \\ 2\sqrt{x - 4} - \sqrt{y} - 4\sqrt{z + 4} = -12; \\ x + y + z = 14. \end{cases}$

Чишү. МТӨ: $x \geq 4$, $y \geq 0$, $z \geq -4$. $\sqrt{x - 4} = u$, $\sqrt{y} = v$, $\sqrt{z + 4} = w$ булсын, монда $u \geq 0$, $v \geq 0$, $w \geq 0$. Ул вакытта бирелгән система бу рәвешне ала: $\begin{cases} u + v + w = 6; \\ 2u - v - 4w = -12; \\ u^2 + 4 + v^2 + w^2 - 4 = 14. \end{cases}$

Беренче ике тигезләмәдән табабыз: $u = w - 2$, $v = 8 - 2w$. Боларны соңгы тигезләмәгә куябыз: $w^2 - 6w + 9 = 0$ яки $(w - 3)^2 = 0$.

x, y, z ны табу өчен система килеп чыга $\sqrt{x-4}=1$, $\sqrt{y}=2$, $\sqrt{z+4}=3$.

Җавап. (5, 4, 5).

Күнегүләр

1. $\begin{cases}\sqrt{\frac{y}{x}}-2\sqrt{\frac{x}{y}}=1;\\ \sqrt{5x+y}+\sqrt{5x-y}=4.\end{cases}$

2. $\begin{cases}\sqrt{\frac{x+a}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x+a}}=2;\\ x+y-a=xy.\end{cases}$

3. $\begin{cases}\sqrt[3]{\frac{y+1}{x}}-2\sqrt[3]{\frac{x}{y+1}}=1;\\ \sqrt{x+y+1}+\sqrt{x-y+10}=5.\end{cases}$

4. $\begin{cases}x^2+xy+y^2=84;\\ x+\sqrt{xy}+y=14.\end{cases}$

5. $\begin{cases}2(x+y)=3\left(\sqrt[3]{x^2y}+\sqrt[3]{xy^2}\right);\\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=6.\end{cases}$

6. $\begin{cases}\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{5}{2};\\ x+y=5.\end{cases}$

7. $\begin{cases}x^2+x\sqrt[3]{xy^2}=208;\\ y^2+y\sqrt[3]{yx^2}=1053.\end{cases}$

8. $\begin{cases}\left(x+y\sqrt{x}+y^2\right)\sqrt{x+y^2}=65;\\ \left(x-y\sqrt{x}+y^2\right)\sqrt{x+y^2}=185.\end{cases}$

9. $\begin{cases}\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}+\frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}=\frac{17}{4};\\ x(x+y)+\sqrt{x^2+xy+4}=52.\end{cases}$

10. $\begin{cases}\sqrt{x^2+5}+\sqrt{y^2-5}=5;\\ x^2+y^2=13.\end{cases}$

11. $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}=3;\\ \sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}=5;\\ \sqrt{z+x}+\sqrt{x+y}=4.\end{cases}$

12. $\begin{cases}\sqrt[3]{x+y}+\sqrt[3]{y+z}=3;\\ \sqrt[3]{y+z}+\sqrt[3]{x+z}=1;\\ \sqrt[3]{x+z}+\sqrt[3]{x+y}=0.\end{cases}$

13. $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{\frac{z}{x}} = 3; \\ \sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{\frac{z}{x}} + \sqrt{\frac{x}{z}} = 3; \\ \sqrt{xyz} = 1. \end{cases}$

Җаваплар

1. $(1, 4)$. 2. Әгәр $a \neq 0$ булса, $\{(2;\ a);\ (2 - a;\ a)\}$; әгәр $a = 0$ булса, $x = 2$, $y = 3$. 3. $\left\{(1;\ 7),\ \left(\frac{49}{64};\ \frac{41}{8}\right),\ (7;\ -8)\right\}$. 4. $\{(2;\ 8),\ (8;\ 2)\}$. 5. $\{(8;\ 64),\ (64;\ 8)\}$. 6. $\{(4;\ 1),\ (1;\ 4)\}$. 7. $\{(8;\ 27),\ (-8;\ 27),\ (8, -27),\ (-8, -27)\}$. 8 $\{(9; -4),\ (16; -3)\}$. 9. $\{(5;\ 4),\ (-5; -4),\ (15, -12),\ (-15,\ 12)\}$. 10. $\{(2;\ 3),\ (-2; -3),\ (2, -3),\ (-2,\ 3)\}$. 11. $(3, -2,\ 6)$. 12. $(-4,\ 5,\ 3)$. 13. $\left\{(1;\ 1;\ 1);\ \left(\sqrt[3]{16};\ \frac{1}{\sqrt[3]{4}};\ \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)\right\}$.

6.5. Күрсәткечле һәм логарифмик тигезләмәләр кергән системалар

Мондый системаларны чишкәндә югарыда каралган ысуллар һәм шулай ук күрсәткечле һәм логарифмик тигезләмәләрне чишү методлары кулланыла.

Мисаллар: а) $\begin{cases} 2^{\frac{x-y}{2}} + 2^{\frac{y-x}{2}} = 2{,}5; \\ ln(2x - y) + 1 = ln(y + 2x) + lg6. \end{cases}$

Чишү. МТӨ: $\begin{cases} 2x - y > 0; \\ y + 2x > 0. \end{cases}$

Беренче тигезләмә, $2^{\frac{x-y}{2}}$ ны t га алыштырсак, $(t > 0)$, квадрат тигезләмәгә әйләнә: $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0$, моннан $t_1 = 0{,}5$;

$t_2 = 2$. Шулай итеп, беренче тигезләмә ике тигезләмә җыелмасына тигезкөчле: $2^{\frac{x-y}{2}} = 2^{-1}$ һәм $2^{\frac{x-y}{2}} = 2$ яки $x - y = -2$ һәм $x - y = 2$.

Төп системаның икенче тигезләмәсеннән: $10(2x - y) = 6(y + 2x)$ яки $x = 2y$. x һәм y ны табу өчен ике система килеп чыкты:

$$\begin{cases} x - y = -2, \\ x = 2y \end{cases} \quad \text{һәм} \quad \begin{cases} x - y = 2, \\ x = 2y. \end{cases}$$

Беренче системадан: $x = -4$; $y = -2$ (МТӨ сенә керми), икенче системадан: $x = 4$, $y = 2$.

Җавап. (4, 2).

б) $$\begin{cases} 2^{\sqrt{xy}-2} + 4^{\sqrt{xy}-1} = 5; \\ \dfrac{3(x+y)}{x-y} + \dfrac{5(x-y)}{x+y} = 8. \end{cases}$$

Чишү. МТӨ: $x \neq \pm y$; $xy \geq 0$. $2^{\sqrt{xy}-2}$ ны t $(t > 0)$ га алыштырып, системаның беренче тигезләмәсен билгесезе t булган квадрат тигезләмә рәвешендә язабыз: $t + 4t^2 = 5$. Моннан $t_1 = -\frac{5}{4}$ (ярамый), $t_2 = 1$. Димәк, беренче тигезләмә $2^{\sqrt{xy}-2} = 1$ тигезләмәсенә тигезкөчле. Моннан $\sqrt{xy} = 2$.

Төп системаның икенче тигезләмәсендә $\frac{x+y}{x-y} = z$ дип билгелибез: $3z + \frac{5}{z} = 8$. Моннан $z_1 = 1$, $z_2 = \frac{5}{3}$. Шулай итеп, икенче тигезләмә ике тигезләмә җыелмасына тигезкөчле:

$$\frac{x+y}{x-y} = 1; \qquad \frac{x+y}{x-y} = \frac{5}{3}.$$

x һәм y ны табу өчен ике система җыелмасы хасил була:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} = 1; \\ \sqrt{xy} = 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} = \dfrac{5}{3}; \\ \sqrt{xy} = 2. \end{cases}$$

Беренче системаның тигезләмәләре тамырдаш түгел, икенче системаның ике чишелеше бар: $x_1 = -4$; $y_1 = -1$ һәм $x_2 = 4$, $y_2 = 1$.

Җавап. $\{(-4, -1), (4, 1)\}$.

в) $\begin{cases} 20x^{\log_3 y} + 7y^{\log_3 x} = 81\sqrt[3]{3}; \\ xy = 9\sqrt[3]{9}. \end{cases}$

Чишү. МТӨ: $x > 0$, $y > 0$. $y^{\log_3 x} = x^{\log_3 y}$ икәнен исәпкә алабыз, беренче тигезләмәдән: $27x^{\log_3 y} = 81\sqrt[3]{3}$. Моннан $x^{\log_3 y} = 3^{\frac{4}{3}}$.

Бу тигезләмәне һәм системаның икенче тигезләмәсен 3 нигезе буенча логарифмлыйбыз:

$$\begin{cases} \log_3 y \cdot \log_3 x = 4/3. \\ \log_3 y + \log_3 x = 8/3. \end{cases}$$

Ә бу система төп системага эквивалент. Соңгы системадагы билгесезләр кергән $\log_3 x$ һәм $\log_3 y$ аңлатмаларын квадрат тигезләмәнең тамырлары дип карап була: $z^2 - \frac{8}{3}z + \frac{4}{3} = 0$; $\log_3 x_1 = 2$; $\log_3 y_1 = \frac{2}{3}$, $\log_3 x_2 = \frac{2}{3}$, $\log_3 y_2 = 2$.

Җавап. $\left\{\left(9; \sqrt[3]{9}\right); \left(\sqrt[3]{9}; 9\right)\right\}$.

Күнегүләр

1. $\begin{cases} (x + y)^{2^{y-2x}} = 6{,}25; \\ \sqrt[2x-y]{x + y} = 5. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2^{\frac{x+y}{3}} + 2^{\frac{x+y}{6}} = 6; \\ x^2 + 5y = 6xy. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0; \\ x^2 - 2y^2 - 8 = 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \log_x y = 2; \\ \log_{x+1}(y + 23) = 3. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2 - \log_2 y = 2\log_2(x + y); \\ \log_2(x + y) + \log_2\left(x^2 - xy + y^2\right) = 1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4; \\ \log_4 x - \log_4 y = 1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \sqrt[x]{x + 2y} = 2; \\ (2x + 4y)\,3^x = 72. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \left(x^2 + y^2\right)^{\lg(x-y)} = 0{,}1; \\ \left(x^2 + 2xy + y^2\right)^{\lg\left(x^2 - y^2\right)} = 10^4. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y}; \\ x^2 y = 1. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \log_5 x + 3^{\log_3 x} = 7; \\ x^y = 5^{12}. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^2 y + 2y - y^2 - 2xy = 0; \\ \log_x y + 2\log_y x = 3. \end{cases}$

12. $\begin{cases} (x + y)\,3^{y-x} = \frac{5}{27}; \\ 3\log_5(x + y) = x - y. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3^x 2^y = 972; \\ \log_{\sqrt{3}}(x - y) = 2. \end{cases}$

14. $\begin{cases} yx^{\log_y x} = x^{2{,}5}; \\ \log_3 y \log_y (y - 2x) = 1. \end{cases}$

Җаваплар

1. (9, 6). 2. (3, 3), (5, 1). 3. (4,2). 4. (2, 4). 5. $\left\{(1,\ 1),\ \left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{6};\ \frac{2}{3}\sqrt{6}\right)\right\}$.

6. $\left\{\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{8}\right),\ (8,\ 2)\right\}$. 7. (2, 1). 8. {(5,005; – 4,995), (50,05; 49,95)}.

9. $\left\{(1,\ 1),\ \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}};\ \sqrt{9}\right)\right\}$. 10. $\left\{(5^4,\ 3),\ (5^3,\ 4)\right\}$. 11. (2, 2). 12. (4, 1). 13. (5, 2). 14. (3, 9).

6.6. Тригонометрик тигезләмәләр кергән системалар

Мисаллар. а) $\begin{cases} x + y = \pi/6; \\ 5(\sin 2x + \sin 2y) = 2\left(1 + \cos^2(x - y)\right). \end{cases}$

Чишү. МТӨ: $x \in R$. Икенче тигезләмәдә синуслар суммасын тапкырчыгышка алыштырабыз: $10\sin(x + y)\cos(x - y) =$

$= 2\left(1 + \cos^2(x - y)\right)$ һәм, беренче тигезләмә нигезендә үзгәртәбез:

$10 \cdot \frac{1}{2}\cos(x - y) = 2\left(1 + \cos^2(x - y)\right).$

$\cos(x - y)$ өчен квадрат тигезләмә таптык, ә ул ике тигезләмә жыелмасына тигезкөчле: $\cos(x - y) = 2$ һәм $\cos(x - y) = 0{,}5$.

Беренче тигезләмәнең реаль чишелеше юк, икенче тигезләмәдән: $x - y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$. Шулай итеп, төп система ике системага тигезкөчле:

$$\begin{cases} x + y = \pi/6; \\ x - y = \frac{\pi}{3} + 2\pi k. \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = \pi/6; \\ x - y = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k. \end{cases}$$

Җавап. $\left(\frac{\pi}{4} + \pi k;\ -\frac{\pi}{12} - \pi k\right)$;

$\left(-\frac{\pi}{12} + \pi k;\ \frac{\pi}{4} - \pi k\right)$.

б) $\begin{cases} \sqrt{2}\cos x = \sqrt{3}\cos y, \\ \sqrt{2}\sin x = \sin y. \end{cases}$

Чишү. МТӨ: x, $y \in R$. Бу тигезләмәләрне кушып һәм алып, бирелгән тигезләмәләр системасына тигезкөчле система табабыз:

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos x + \sqrt{2}\sin x = \sqrt{3}\cos y + \sin y. \\ \sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}\sin x = \sqrt{3}\cos y - \sin y. \end{cases}$$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{4} \pm x\right)$, ә $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos y \pm \frac{1}{2}\sin y = \cos\left(\frac{\pi}{6} \pm y\right)$

булганлыктан, беренче һәм икенче тигезләмәне $\frac{1}{2}$ гә тапкырлап

табабыз: $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - y\right); \\ \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + y\right). \end{cases}$

Беренче тигезләмәдән: $\frac{\pi}{4} - x \pm \left(\frac{\pi}{6} - y\right) = 2\pi n$, $n \in z$, моннан ике тигезләмә жыелмасы килеп чыга: $x + y = \frac{5\pi}{12} - 2\pi n$; $x - y = \frac{\pi}{12} - 2\pi n$.

Системаның икенче тигезләмәсеннән шулай ук ике тигезләмә җыелмасы килеп чыга: $x + y = -\frac{5\pi}{12} + 2\pi m$; $x - y = -\frac{\pi}{12} + 2\pi m$, $m \in z$. Биредә бөтен сан n түгел, ә m дип билгеләнә.

Шулай итеп, төп система ике система җыелмасына күчә:

$$\begin{cases} x + y = \frac{5\pi}{12} - 2\pi n; \\ x - y = -\frac{\pi}{12} + 2\pi m. \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = -\frac{5\pi}{12} + 2\pi m; \\ x - y = \frac{\pi}{12} - 2\pi n. \end{cases}$$

Беренче системаны чишеп табабыз: $x = \frac{\pi}{6} + \pi(m - n)$; $y = \frac{\pi}{4} - \pi(m - n)$.

Икенче системадан: $x = -\frac{\pi}{6} + \pi(m - n)$; $y = -\frac{\pi}{4} + \pi(m - n)$.

Җавап. $\left(\frac{\pi}{6} + \pi(m - n); \frac{\pi}{4} - \pi(m + n)\right)$;

$\left(-\frac{\pi}{6} + \pi(m - n); -\frac{\pi}{4} + \pi(m + n)\right)$.

в) $\begin{cases} \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{tg}\frac{y}{2} = 2; \\ \operatorname{ctg}x + \operatorname{ctg}y = -1{,}8. \end{cases}$

Чишү. МТӨ: $x \neq \pi n$, $y \neq \pi k$. Тригонометрик функцияләрнең кушу формулаларын кулланып, түбәндәге системаны табабыз:

$$\begin{cases} \dfrac{\sin\frac{x+y}{2}}{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}} = 2; \\ \dfrac{\sin(x+y)}{\sin x \sin y} = -1{,}8. \end{cases}$$

Икенче тигезләмәнең сул ягын, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ формуласын кулланып, түбәндәге рәвештә язабыз:

$$\frac{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}}{4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\sin\frac{4}{2}\cos\frac{y}{2}} = -1{,}8.$$

Системаның беренче тигезләмәсен кулланабыз:

$$2\,\frac{2\cos\frac{x+y}{2}}{4\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}} = -1{,}8.$$

Соңгы тигезләмәне түбәндәге рәвештә язабыз:

$$\frac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} - \sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}}{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}} = -1{,}8.$$

Моннан $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\operatorname{ctg}\frac{y}{2}-1=-1{,}8$ яки $\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}=-\frac{10}{8}$.

Шулай итеп, төп системаны тигезкөчле системага күчерәбез:

$$\begin{cases}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}=-\frac{10}{8};\\ \operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{y}{2}=2.\end{cases}$$

Бу системадан күренгәнчә, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ һәм $\operatorname{tg}\frac{y}{2}$ түбәндәге квадрат тигезләмәнең тамырлары була: $z^2-2z-\frac{10}{8}=0$. Шулай итеп, ике система җыелмасын табабыз:

$$\begin{cases}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{5}{2};\\ \operatorname{tg}\frac{y}{2}=-\frac{1}{2}.\end{cases}\qquad \begin{cases}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=-\frac{1}{2};\\ \operatorname{tg}\frac{y}{2}=\frac{5}{2}.\end{cases}$$

Җавап. $\left(2\operatorname{arctg}\frac{5}{2}+2\pi n;\ 2\pi n-2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$, $\left(2\pi m-2\operatorname{arctg}\frac{1}{2};\ 2\operatorname{arctg}\frac{5}{2}+2\pi n\right)$.

Күнегүләр

1. $\begin{cases}9^{2\operatorname{tg}x+\cos y}=3;\\ 9^{\cos y}-81^{\operatorname{tg}x}=2.\end{cases}$

2. $\begin{cases}\sin x\cos y=\frac{1}{2};\\ \sin y\cos x=\frac{1}{2}.\end{cases}$

3. $\begin{cases}\sin x\cos y=0{,}25;\\ \sin y\cos x=0{,}75.\end{cases}$

4. $\begin{cases}x+y=\frac{\pi}{2};\\ \operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=2.\end{cases}$

5. $\begin{cases}x+y=75;\\ \sin^2 x+\sin^2 y=\frac{3}{4}.\end{cases}$

6. $\begin{cases}x+y=\frac{2}{3}\pi;\\ \frac{\sin x}{\sin y}=2.\end{cases}$

7. $\begin{cases}\sin x+\cos y=0;\\ \sin^2 x+\cos^2 y=\frac{1}{2}.\end{cases}$

1. $\left(\pi m;\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n\right).$

2. $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(2n+m);\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(2n-m)\right).$

3. $\left\{\left(\frac{\pi}{6}+\pi(m+n);\ \frac{\pi}{3}+\pi(n-m)\right);\ \left(\left(-\frac{\pi}{6}+\pi(n+m);\ \frac{2\pi}{3}+\pi(n-m)\right)\right\}.$

4. $\left(\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \frac{\pi}{4}-\pi k\right).$

5. $\left\{\left(\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \frac{\pi}{6}-\pi k\right),\ \left(\frac{\pi}{6}+\pi k;\ \frac{\pi}{4}-\pi k\right)\right\}.$

6. $\left(\frac{\pi}{2}+\pi m;\ \frac{\pi}{6}-\pi m\right).$

7. $\left\{\left((1-)^{n}\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi m\right),\ \left((-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi m\right)\right\}.$

II бүлек

ТИГЕЗСЕЗЛЕКЛӘР

1. ТӨП ТӨШЕНЧӘЛӘР ҺӘМ БИЛГЕЛӘМӘЛӘР

A һәм B ике математик аңлатма булсын. Аларны $>$ яки $<$ (шулай ук $\geq$ яки $\leq$) тамгалары белән тоташтырсак, түбәндәге тигезсезлекләр килеп чыга: $A<B$, $A>B$, $A\leq B$, $A\geq B$. $A<B$ $(A>B)$ — *төгәл тигезсезлек,* ә $A\leq B$ $(A\geq B)$ *төгәл булмаган тигезсезлек* дип атала.

Төгәл тигезсезлекләр өчен каралачак билгеләмәләр һәм нәтиҗәләр төгәл булмаган тигезсезлекләр өчен дә урынлы.

Тигезсезлеккә керүче үзгәрешле зурлыклар билгесезләр һәм параметрларга бүленә. Тигезсезлеккә керүче үзгәрешлеләрнең кыйммәте бирелгән очракта, A һәм B аңлатмаларының икесенең дә мәгънәсе дөрес булса (ягъни аларның кыйммәтләре реаль сан булса), андый кыйммәтләр үзгәрешленең мөмкин табылган кыйммәтләре дип атала. Мондый кыйммәтләр күплеге мөмкин табылган кыйммәтләр өлкәсе (МТӨ) дип атала. Мәсәлән, $\frac{2a(x+2a)}{a^2-1}>1$ тигезсезлеге a параметрыннан һәм x үзгәрешлесеннән тора. a параметры өчен МТӨ: $a \neq \pm 1$ дән кала барлык реаль саннар күплеге. Тигезсезлекнең МТӨ итеп аңа кергән билгесезнең МТӨ алына: $x \in R$, ягъни x — теләсә нинди реаль сан.

Тигезсезлеккә кергән билгесезләр санына тиңдәш рәвештә, тигезсезлекне бер билгесезле, ике билгесезле һ. б. ш. билгесезле тигезсезлекләр дип атыйлар.

Тигезсезлекләр, тигезләмәләр кебек үк, билгесезләр өстендә эшләнә торган математик гамәлләргә карап, алгебраик һәм трансцендент тигезсезлекләргә бүленәләр, ә алгебраик тигезсезлекләр рациональ һәм иррациональ тигезсезлекләргә бүленәләр.

1.1. Бер билгесезле тигезсезлекләр

Гомумән алганда, бер билгесезле тигезсезлекне $f(x) > \varphi(x)$ рәвешендә язарга мөмкин, монда $f(x)$, $\varphi(x)$ x үзгәрешлесе өчен билгеләнгән функцияләр.

Тигезсезлекнең ике ягында да x урынына x_0 кыйммәтен куйгач санлы дөрес тигезсезлек килеп чыкса, ул сан (x_0) *тигезсезлекнең чишелеше* яки *тамыры* дип атала. Мәсәлән, $\sqrt{x+7} > 2x-1$ тигезсезлеге өчен $x=-3$ кыйммәте аның чишелеше була, чөнки $\sqrt{-3+7} > 2(-3)-1 \Rightarrow 2 > -7$.

Искәрмә. Төгәл булмаган тигезсезлек өчен, x ның санлы дөрес тигезлеккә, я булмаса тигезсезлеккә әверелдерүче кыйммәтләре аның чишелеше дип атала. Мәсәлән, $\sqrt{7x-10} \geq x$ тигезсезлегендә $x=5$ аның чишелеше була, чөнки $\sqrt{7\cdot 5-10} \geq 5 \Rightarrow 5=5$. Тигезсезлекне чишү — тигезсезлекнең барлык тамырларын (чишелешләрен) табу, я булмаса чишелешнең юклыгын күрсәтү ул.

Әгәр беренче тигезсезлекнең барлык чишелешләре икенче тигезсезлекнең чишелеше булса, һәм, киресенчә, икенче тигезләмәнең барлык чишелешләре беренче тигезсезлекнең чишелеше булса, бу ике тигезсезлек тигезкөчле булалар.

1.2. Тигезсезлекне тигезкөчле тигезсезлеккә әверелдерү өчен кагыйдәләр

1. Әгәр $g(x)$ ның тигезсезлекнең мөмкин табылган кыйммәтләре өлкәсендә санлы реаль кыйммәте булса, $f(x) > \varphi(x) \Rightarrow f(x)+g(x) > \varphi(x)+g(x)$ була.

Нәтиҗә. Тигезсезлектә теләсә нинди кушылучыны, тамгасын үзгәртеп, тигезсезлекнең бер ягыннан икенче ягына күчерергә мөмкин, мәсәлән, $f(x) > \varphi(x) \Leftrightarrow f(x)-\varphi(x) > 0$ яки $\varphi(x)-f(x) < 0$.

2. Әгәр тигезсезлекнең кыйммәтләре өлкәсендә $g(x)$ билгеләнсә һәм $g(x) > 0$ булса, $f(x) > \varphi(x) \Leftrightarrow g(x)f(x) > g(x)\varphi(x)$ була.

3. Әгәр тигезсезлекнең кыйммәтләре өлкәсендә $g(x)$ билгеләнсә һәм $g(x) < 0$ булса, $f(x) > \varphi(x) \Leftrightarrow g(x)f(x) < g(x)\varphi(x)$ була.

4. $f(x) > \varphi(x) > 0 \Leftrightarrow f^n(x) > \varphi^n(x)$, $n \in N$.

Мисал. $\sqrt{x+1} < 2x+1$ тигезсезлегенең МТӨ $x \geq -1$ саннары күплеге. x ның $-1 \leq x \leq 0{,}5$ тигезсезлеген канәгатьләндерүче кыйммәтләре өчен төп тигезсезлек үтәлми, шуның өчен тигезсезлек-

нең чишелешләре $x > -\frac{1}{2}$ күплегендә генә булуы мөмкин. $x > -\frac{1}{2}$ булганда тигезсезлекнең ике ягы да уңай булганлыктан, $\sqrt{x+1} < 2x+1 \Leftrightarrow x+1 < (2x+1)^2$ була.

5. Әгәр беренче тигезсезлекнең МТӨ $a>1$ булса, $\log_a f(x) > \log_a \varphi(x) \Leftrightarrow f(x) > \varphi(x)$ була; әгәр $a<0$ ($a>0$) булса, $\log_a f(x) > \log_a \varphi(x) \Leftrightarrow f(x) < \varphi(x)$ була.

6. Әгәр $a>1$ булса, $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)} \Leftrightarrow f(x) > \varphi(x)$ була; $a<1$ булса, $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)} \Leftrightarrow f(x) < \varphi(x)$ була.

Тигезсезлекләрне чишкәндә югарыда күрсәтелгән кагыйдәләрдән тыш кагыйдәләр дә кулланыла. Ул вакытта алар тигезсезлектә очрый торган функцияләрнең үзлекләрен файдаланып кулланылалар.

Тигезсезлекләрне чишкәндә, гомумән, тигезкөчле рәвешүзгәртүләр кулланыла. Әгәр тигезкөчле булмаган үзгәртүләр булса, табылган чишелешне тикшереп карау кирәк, ә иң мөһиме, әгәр рәвешүзгәрткәндә МТӨ кечерәя төшсә, тамырның югалуы мөмкинлеген истән чыгармаска кирәк.

1.3. Тигезсезлекләрне интерваллар методын кулланып чишү

Интерваллар куллану методы кисемтәдә өзлексез булган функциянең әһәмиятле бер үзлегенә нигезләнгән.

Әйтик, $f(x)$ функциясе [a, b] кисемтәсендә өзлексез һәм кисемтәнең очларында тамгалары төрле булган кыйммәтләргә ия ди. Ул вакытта кисемтә эчендә функциянең кыйммәте нульгә тигез булган бер генә булса да нокта табыла, ягъни әгәр функция монотон үзгәрешле булса, c бердәнбер нокта була.

Искәрмә. Мәктәп математика курсында иң гади функцияләрдән: x^α, a^x, $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}x$, $\mathrm{ctg}(x)$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\mathrm{arctg}x$, $\mathrm{arcctg}x$ чикле арифметик гамәлләр һәм катлаулы функцияләр кулланып табылган функция *элементар функция* дип атала. Үзенең кыйммәтләре өлкәсендә һәр элементар функция өзлексез була.

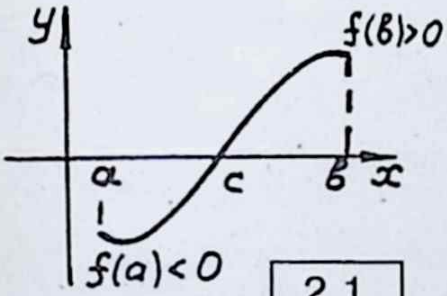
Хәзер $f(x) \vee 0$ рәвешле тигезсезлек карыйк, монда $\vee$ символын тигезсезлек тамгаларының ($<$, $>$, $\le$, $\ge$) берсе дип аңлау кирәк.

1 нче теорема. Әйтик, $f(x)$ X аралыгында билгеләнгән һәм өзлексез функция һәм $x_1, x_2, \ldots, x_n$ функциянең нульләре (тамырлары) булсын. Билгеләнү өлкәсенең функция нульләре белән бүленгән интервалларның һәркайсында функциянең тамгасы саклана (2.3 рәс.).

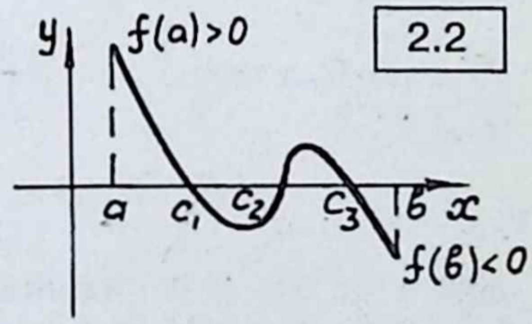
Бу теорема нигезендә, функциянең нульләрен табып, кыйммәтләр өлкәсен интервалларга бүләбез, исәпләү өчен уңай булган берәр нокта алып, һәр интервалда функциянең тамгасын табабыз. Тамгалар схемасын исәпкә алып, тигезсезлекнең чишелешен язабыз (2.3. рәс.).

Искәрмә. $f(x)$ функциясенең тамгалар схемасында тамгаларның бер-бер артлы алышып торулары бик үк мөһим түгел икәнен әйтеп китик.

$f(x)$ функциясе тамгаларының чиратлашуы өчен түбәндәге теоремада каралган шарт җитә.

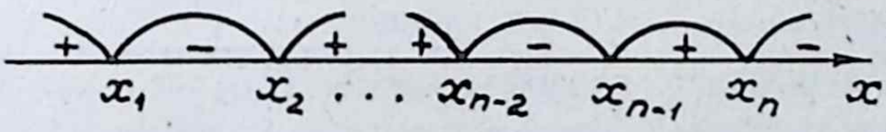


2.1



2.2

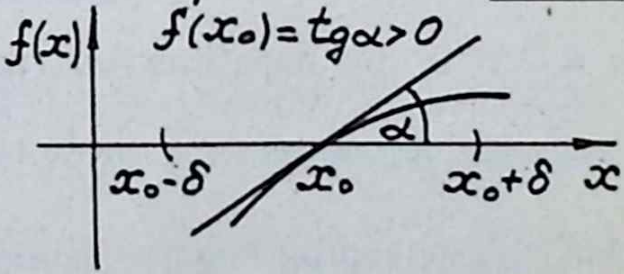
2.3



2 нче теорема*. Әгәр $f(x)$ функциясе x_0 ноктасында дифференцияләнсә һәм $f(x_0) = 0$, $f'(x) \neq 0$ булса, x_0 ноктасында функция үзенең тамгасын алыштыра (2.4. рәс.).

2.4

Нәтиҗә. Әгәр $f'(x_i) \neq 0$ булса (биредә $f'(x_i) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots n)$, нуль аша үткәндә $f(x)$ функциясенең тамгасы үзгәрә.



* Теореманы исбатлау Гараев К. Г., Исхаков Э. М. (Пособие по математике для поступающих в высшие учебные заведения. — Казань: Таткнигоиздат, 1986) китабында бирелгән.

Искәрмә. $f'(x_i) \neq 0$ тамга үзгәрү өчен бары тик җитәрлек шарт, кирәкле шарт түгел. Мәсәлән, $f(x) = x^3$ нуль ноктасын үткәндә тамгасын үзгәртә һәм шул ук вакытта $f'(0) = 0$.

2. РАЦИОНАЛЬ ТИГЕЗСЕЗЛЕКЛӘР

2.1. Беренче дәрәҗә тигезсезлек

$ax + b > 0$ рәвешле тигезсезлекнең чишелеше:

1) $a > 0$ булганда, $x > -\frac{b}{a}$,

2) $a < 0$ булганда, $x < -\frac{b}{a}$.

2.2. Икенче дәрәҗә тигезсезлек

$ax^2 + bx + c > 0$ рәвешле икенче дәрәҗә тигезсезлекне чишкәндә, тигезсезлекнең сул ягын график рәвештә күрсәтү файдалы. $y = ax^2 + bx + c$ функциясенең графигы параболадан гыйбарәт һәм, a коэффициентының һәм дискриминантның $\left(D = b^2 - 4ac\right)$ тамгаларына бәйле рәвештә, параболаның $0x$ (2.5 рәс.) күчәренә карата алты төрле урнашуы мөмкин. Бу алты вариантны белү $y = ax^2 + bx + c$ функциясенең тамгалар интервалларын ачыкларга мөмкинлек бирә.

Мисаллар. а) Тигезсезлекне чишегез: $3x^2 + x - 2 > 0$.

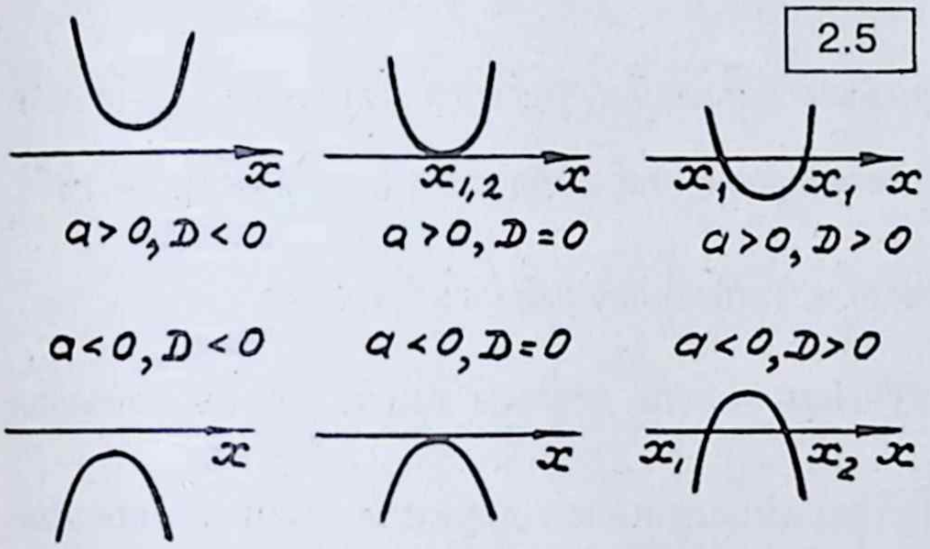
Чишү. $3x^2 + x - 2$ өчбуынының тамгалары $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{2}{3}$, $a = 3 > 0$, бу параболаның графигы 2.6 рәсемдәге кебек урнаша. Рәсемнән күренгәнчә, x ның $x < -1$ һәм $x > \frac{2}{3}$ тигезсезлекләрен канәгатьләндергән барлык кыйммәтләре өчен $y = 3x^2 + x - 2 > 0$.

Җавап. $x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$.

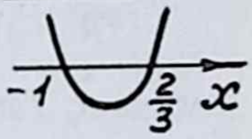
б) Тигезсезлекне чишегез: $x^2 - 2x - 3 \leq 0$.

Чишү. $x^2 - 2x - 3$ күпбуынының ике тамыры бар: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. Бу зурлыклар төгәл булмаган тигезсезлекнең чишелеше булып торалар. $y = x^2 - 2x - 3$ функциясенең графигы 2.7 рәсемдә сурәтләнгән, бу рәсемнән күренгәнчә, x ның $-1 < x < 3$

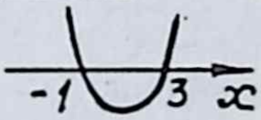
2.5



2.6



2.7



интервалына кергән барлык кыйммәтләре өчен $x^2 - 2x - 3 < 0$. Бу интервалга ике нокта өстәп, тигезсезлекнең чишелешен табабыз. Ул кисемтә була.

Җавап. $x \in [-1, 3]$.

в) Тигезсезлекне чишегез: $x^2 + x + 1 > 0$.

Чишү. Бу күпбуынның реаль тамырлары юк (дискриминант тискәре), $a = 1 > 0$, димәк, $y = x^2 + x + 1$ функциясенең графигы Ox күчәреннән өстә ята һәм x ның теләсә нинди кыйммәте өчен $y > 0$.

Җавап. $-\infty < x < \infty$.

2.3. Рациональ тигезсезлекләрне интерваллар методы белән чишү

Тулы рациональ тигезсезлек $P_n(x) > 0$ $(P_n(x) \geq 0)$ интерваллар методын файдаланып чишелә. Күпбуынны түбәндәге рәвештә язу кулланыла: $P_n(x) = a_0(x - c_1)^{m_1}(x - c_2)^{m_2}\ldots(x - c_k)^{m_k}$, биредә $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$, a_0, x^n буынының коэффициенты, c_i — күпбуынның тамырлары һәм алар арасында комплекс саннар да булуы мөмкин. Шунысы билгеле, әгәр күпбуын реаль коэффициентлардан торса, комплекс тамырлар бер-берсенә иярешле рәвештә ти-

гезләмәгә керәләр. Мәсәлән, $x^2 + 2x + 3$ күпбуынының тамырлары $x_1 = -1 + \sqrt{-2}$, $x_2 = -1 - \sqrt{-2}$ иярешле комплекс саннар, күпбуын түбәндәгечә таркатыла: $x^2 + 2x + 3 = (x - x_1)(x - x_2) = (x + 1 - \sqrt{-2})(x + 1 + \sqrt{-2})$.

Әгәр $P_n(x)$ күпбуынын тапкырлаучыларга таркатып, иярешле комплекс тамырларны бер-берсенә тапкырласак, күпбуын $(x - c)^m$, $(x^2 + px + q)^r$, a_0 рәвешле тапкырлаучыларга таркала.

$(x - c)^m$ тапкырлаучысы m нчы дәрәҗә тәңгәл реаль тамырга тиңдәш, $(x^2 + px + q)^r$, тапкырлаучысы r дәрәҗәле тәңгәл иярешле комплекслы парга тиңдәш (бу өчбуынның дискриминанты тискәре). $x^2 + px + q$ өчбуын x ның һәр кыйммәте өчен дә уңай, шуның өчен тапкырлаучыларга таркалган тигезсезлектән андый тапкырлаучыларны төшереп калдырырга да була, нәтиҗәдә тигезкөчле тигезсезлек табыла. Мәсәлән, $2(x - 1)^2(x + 2)(x^2 + 2x + 3) > 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2(x + 2) > 0$.

Интерваллар куллану методының төп идеясе шуннан гыйбарәт: җөп дәрәҗәдәге тәңгәл тамырларда күпбуынның тамгасы үзгәрми, так дәрәҗәле тәңгәл тамырларда күпбуынның тамгасы үзгәрә.

Искәрмә. Әгәр күпбуынның барлык реаль тамырлары так дәрәҗәдә булса, тамгалар схемасы чиратлаша торган була.

Шулай итеп, $P_n(x) > 0$ $(P_n(x) \geq 0)$ тигезсезлеген чишү өчен $P_n(x)$ күпбуынының тамырларын табарга, тәңгәл тамырларның дәрәҗәсен, тамырлар белән чикләнгән интервалдагы берәр ноктада $P_n(x)$ ның $(P_n(x) \neq 0)$ тамгасын табу кирәк.

Вакланмалы рациональ тигезсезлекләр бөтен рациональ тигезсезлекләр кебек үк эшләнә, чөнки:

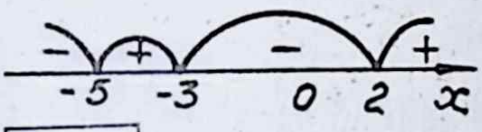
$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0 \Leftrightarrow P_n(x)\,Q_m(x) > 0;$$

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P_n(x)\,Q_m(x) \geq 0, \\ Q_m(x) \neq 0. \end{cases}$$

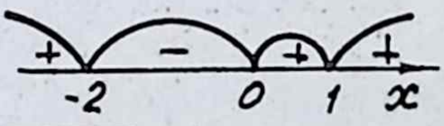
Соңгы очракта ваклаучының һәм санаучының тамырларын табып, $P_n(x)\,Q_m(x) > 0$ булган интервалларны аерып алырга, аларга санаучының тамырларын кушарга кирәк, килеп чыккан билгесезләр күплеге тигезсезлекнең җавабы була.

Мисаллар. а) $(x-2)(x+3)(x+5) \geq 0.$

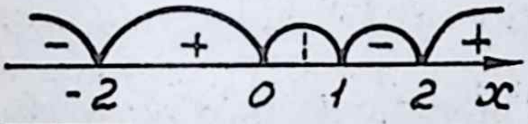
Чишү. $x_1 = -5,\ x_2 = -3,\ x_3 = 2,\ f(x) = (x-2)(x+3)(x+5)$



2.8



2.9



2.10

функциясенең тамырлары (нульләре) була. Барлык тамырлар да гади (дәрәҗәләре бергә тигез), шуның нәтиҗәсендә тамгалар схемасында тамгалар чиратлаша: $f(0) = -30 > 0$. График 2.8 рәсемдә сурәтләнгән. Төп тигезсезлек төгәл булмаганлыктан, $f(x) > 0$ тигезсезлеге интервалларына тамырларны өстәп, җавапны табабыз.

Җавап. $-5 \leq x \leq -3,\ 2 \leq x < \infty.$

б) $x(x-1)^2(x+2)^3 < 0.$

Чишү. $f(x) = x(x-1)^2(x+2)^3$ функциясенең тамырлары: $x_1 = -2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1.$ Соңгы тамыр икенче дәрәҗәдә, шуңа күрә тамгалар схемасына тәэсир итми. Моннан 2.9 рәсемендә күрсәткән тамгалар схемасын табабыз.

Җавап. $-2 < x < 0.$

в) $\dfrac{x-1}{x^2(x-2)(x+2)^3} \leq 0.$

Чишү. Санаучының тамыры: $x = 1$, ваклаучының тамырлары: $x_1 = -2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2.$ $(x-1)x^2(x-2)(x+2)^2 < 0$ тигезсез-

леге $(x-1)(x-2)(x+2)<0$ тигезсезлегенә тигезкөчле. $x=-10$ булганда, тигезсезлекнең сул ягы тискәре һәм тамгалар схемасы 2.10 рәсемендә сурәтләнгән рәвештә була. Соңгы тигезсезлекнең (димәк төп тигезсезлекнең) интервалларына санаучының да тамырын өстибез.

Җавап. $-\infty < x < -2$,
$1 \le x < 2$.

г) $$\frac{(2x-3)(4-x)^3(x^2+1)}{(x-3)^2(5-3x)} \ge 0.$$

Чишү. Башта тигезсезлекнең сул ягының тапкырлаучыларын $(x-c)^m$ рәвешенә китерәбез:

$$\frac{2(x-\frac{3}{2})(x-4)^3(x^2+1)}{3(x-3)^2(x-\frac{5}{3})} \ge 0.$$

Ox саннар турысында ваклаучының һәм санаучының тамырларын билгелибез (2.11 рәс.). Анда $(x-1{,}5)(x-4)^3\left(x-\frac{5}{3}\right)>0$ тигезсезлеген карыйбыз. x^2+1 һәм $(x-3)^2$ тапкырлаучылары төшереп калдырылган, чөнки беренчесе һәрвакыт уңай, икенчесе дә тамгалар схемасына тәэсир итми. Бу 2.11 рәсемдә күренә. $f(x) = \left(x-\frac{3}{2}\right)(x-4)^3\left(x-\frac{5}{3}\right)$ функциясенең $x=-100$ булганда тискәре һәм тамгаларының $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, 4 тамырларында гына үзгәрүен искә алып, 2.11 рәсемдәге тамгалар схемасын табабыз. Тигезсезлекнең сул ягы уңай булган интервалларга санаучыларның тамырларын өстибез.

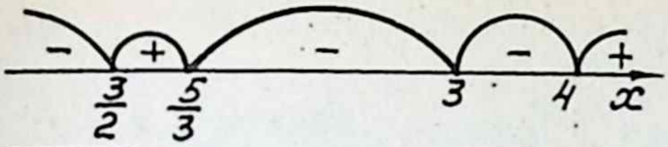
Җавап. $\frac{3}{2} \le x < \frac{5}{3}$, $4 \le x < \infty$.

д) $|2x+3| < 5$.

Чишү. МТӨ: $x \in R$.

Беренче юл (интерваллар методы). $f(x) = |2x+3|-5=0$ тигезләмәсенең тамырлары: $x_1=-4$, $x_2=1$. Тамгалар схемасы 2.12 рәсемендә сурәтләнгән. $f(0)=-2<0$. Моннан $-4<x<1$.

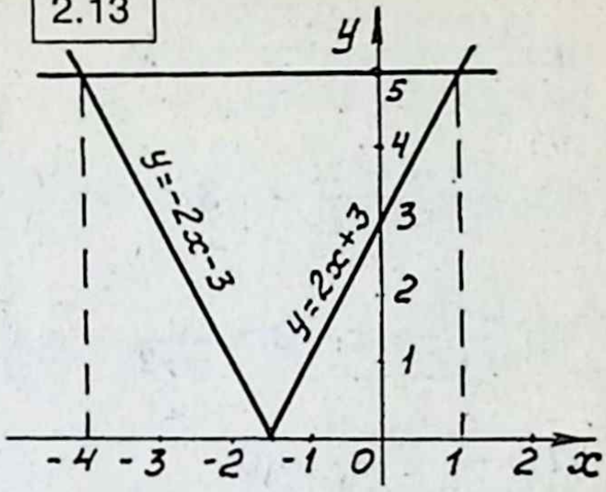
Икенче юл. Тигезсезлекнең ике ягын да квадратка күтәрәбез: $4x^2+12x+9<25 \Leftrightarrow x^2+3x-4<0 \Rightarrow -4<x<1$.



2.11

2.12

2.13



Өченче юл. Төп тигезсезлек икеләтелгән тигезсезлеккә эквивалент: $-5 < 2x + 3 < 5 \Leftrightarrow -8 < 2x < 2 \Leftrightarrow -4 < x < 1$.

Дүртенче юл (график юл). Сул һәм уң якның графиклары 2.13 рәсемендә сурәтләнгән.

Җавап. $-4 < x < 1$.

ж) $\left|x^3 - 1\right| \le x^2 + x + 1$.

Чишү. МТӨ: $x \in R$. $\left|x^3 - 1\right| = |x - 1| \cdot \left|x^2 + x + 1\right|$ булганлыктан, бирелгән тигезсезлек түбәндәге тигезсезлеккә эквивалент: $|x - 1|\left(x^2 + x + 1\right) \le x^2 + x + 1$, яки ике ягын да $x^2 + x + 1 > 0$ гә бүлгәннән соң: $|x - 1| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le x - 1 \le 1 \Leftrightarrow 0 \le x \le 2$.

Җавап. $0 \le x \le 2$.

Күнегүләр

1. $x + \frac{6}{x} < 7$.

2. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 < 0$.

3. $x^8 - 6x^7 + 9x^6 - x^2 + 6x - 9 < 0$.

4. $(x - 1)^2(x - 3)\left(x^2 - 3x + 6\right) > 0$.

5. $\frac{x^2+2}{x-1} < -2$.

6. $\frac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3} > -3$.

7. $\frac{x^2+5x+4}{x^3+1} \ge 1$.

8. $\frac{x^3+15}{x^3+8} < 2$.

9. $\frac{(x+3)^2(x+1)(x-5)}{(x-4)^2(x-2)} \le 0.$

10. $\frac{(1+x)(2+x)}{x^2-|x|-2} \ge -3x.$

11. $\frac{|x-1|}{x+2} + x - 3 > \frac{1}{x+2}.$

12. $\frac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9} < 0.$

13. $|2x-3| > 7.$

14. $\left|\frac{2x-1}{x+2}\right| \le 4.$

15. $|2x-1| < |x+3|.$

16. $\left|x^2+4x+3\right| > x+3.$

17. $\left|x^2-6x+8\right| \le 4-x.$

18. $\left|x-1-x^2\right| \le \left|x^2-3x+4\right|.$

19. $\left|x^2-5x\right| < 6.$

20. $\left|\frac{3x+1}{x+3}\right| < 3.$

21. $\frac{|x-3|}{x^2-5x+6} \ge 2.$

22. $|x+1| + |2-x| > 3+x.$

23. $|3-x| + |2x+4| - |x+1| > 2x+4.$

24. $5x-20 \le x^2 \le 8x.$

25. $1 < \frac{3x^2-7x+8}{x^2+1} < 2.$

Җаваплар

1. $x < 0,\ 1 < x < 6.$
2. $x < 1,\ 2 < x < 3.$
3. $-1 < x < 1.$
4. $3 < x.$
5. $x < -2,\ 0 < x < 1.$
6. $x < 1,\ \frac{3}{2} < x < 2,\ 3 < x.$
7. $-1 < x \le 3.$
8. $x < -2,\ -1 < x.$
9. $x \le -1,\ 2 < x < 4,\ 4 < x \le 5.$
10. $\frac{2}{3} \le x \le 1,\ 2 < x.$
11. $-2 < x < 1-\sqrt{7},\ 2\sqrt{2} < x.$
12. $-5 < x < -2,\ 2 < x < 3,\ 3 < x < 5.$

13. $x < -2,\ 5 < x.$

14. $x \le -\frac{9}{2},\ -\frac{7}{6} \le x.$

15. $-\frac{2}{3} < x < 4.$

16. $x < -3,\ -3 < x < -2,\ 0 < x.$

17. $1 \le x \le 3,\ x = 4.$

18. $x \le 1{,}5.$

19. $-1 < x < 2,\ 3 < x < 6.$

20. $-\frac{5}{3} < x.$

21. $\frac{3}{2} \le x < 2.$

22. $x < 0,\ 6 < x.$

23. $x < 1.$

24. $0 \le x \le 8.$

25. $1 < x < 6.$

Түбәндәге бүлекләрдә кайбер мисаллар ике юл белән эшләнә: беренче юл — интерваллар методын турыдан-туры баштагы тигезсезлеккә куллану, икенче юл — төп тигезсезлекне, тигезкөчле рәвешүзгәртеп, рациональ тигезсезлеккә китерү, аннан соң интерваллар ысулын кулланып чишү.

3. ИРРАЦИОНАЛЬ ТИГЕЗСЕЗЛЕКЛӘР

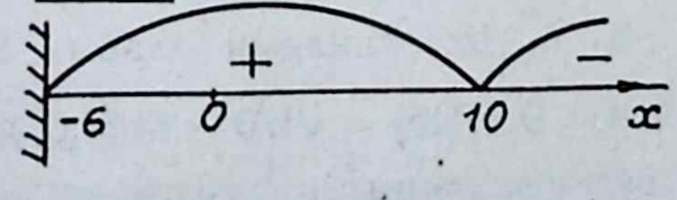
Мисаллар: а) $\sqrt{x+6} < x - 6.$

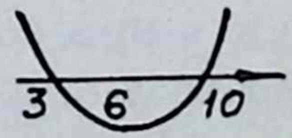
Чишү. МТӨ: $x \ge -6.$

Беренче юл. Монда $f(x) = \sqrt{x+6} - x + 6 < 0.$ $f(x) = 0$ тигезләмәсе $\sqrt{x+6} - (x-6) = 0$ рәвешле була, $\sqrt{x+6}$ ны t белән $(t \ge 0)$ алыштырабыз: $t^2 - t - 12 = 0,$ моннан $t_1 = -3$ (ярамый), $t_2 = 4.$ Димәк, тамыр $(x = 16 - 6 = 10)$ кыйммәтләр өлкәсен ике кисәккә бүлә (2.14 рәс.): $f(0) = \sqrt{6} + 6 > 0;$ $f(30) = \sqrt{36} - 30 + 6 = -18 < 0.$

Җавап. $10 < x < \infty.$

2.14





2.15

Икенче юл. Тигезсезлекнең уң ягының кыйммәтләре өлкәсе уңай булганлыктан, тигезсезлекнең чишелеше $x > 6$ күплегендә

генә булуы мөмкин. $x > 6$ булганда, төп тигезсезлек түбәндәге тигезсезлеккә тигезкөчле: $x + 6 < (x - 6)^2$ яки $x^2 - 13 + 30 > 0$.

$x^2 - 13x + 30$ күпбуынының тамырлары $x_1 = 3$, $x_2 = 10$; $y = x^2 - 13x + 30$ функциясенең графигы 2.15 рәс. сурәтләнгән. $x > 6$ күплегендә рациональ тигезсезлек, димәк, төп тигезсезлек $x > 10$ интервалында дөрес.

Җавап. $10 < x < \infty$.

б) $\sqrt{3x - x^2} < 4 - x$.

Чишү. МТӨ: $x \in [0; 3]$.

Әйтик, $f(x) = \sqrt{3x - x^2} - 4 + x$ булсын. Ул вакытта төп тигезсезлек $f(x) < 0$ рәвешен ала. $f(x) = 0$ тигезләмәсе яки $\sqrt{3x - x^2} = 4 - x$ x ның МТӨ ндә түбәндәге тигезләмәгә эквивалент: $3x - x^2 = 16 - 8x + x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 11x + 16 = 0$. (Бу тигезләмәнең реаль чишелеше юк, димәк, $f(x)$ МТӨ ндә тамгасын үзгәртми.) Аның тамгасы: $f(1) = \sqrt{2} - 3 < 0$.

Җавап. $0 \le x \le 3$.

в) $\sqrt{x^2 - 3x - 10} > x - 2$.

Чишү. МТӨ: $x \le -2$, $x \ge 5$.

Беренче юл. Әйтик, $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 10} - (x - 2)$, ул вакытта $f(x) = 0$ тигезләмәсе $\sqrt{x^2 - 3x - 10} = x - 2$ рәвешен ала. Бу тигезләмәнең чишелеше $x \ge 2$ аралыгында гына булуы мөмкин. Димәк, тигезсезлекнең ике ягы да уңай сан. Аларны квадратка күтәрәбез: $x^2 - 3x - 10 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow x = 14$.

Контроль нокталар итеп -3, 6, 15 саннарын алабыз һәм $f(-3) = \sqrt{8} + 5 > 0$, $f(6) = \sqrt{8} - 4 < 0$, $f(15) = \sqrt{170} - 13 > 0$ икәнен табабыз. ($f(x)$ ның $x \le -2$ булганда тамгасын үзгәртмәвен искә төшерик.)

Җавап. $x \le -2$, $14 < x$.

Икенче юл. Тигезсезлекнең сул ягының кыйммәтләре өлкәсе — уңай зурлык, шуңа $x \le -2$ булганда тигезсезлек хаклы була. $x \ge 5$ күплегендә төп тигезсезлекнең ике ягы да уңай һәм төп тигезсезлек түбәндәге тигезсезлеккә эквивалент: $x^2 - 3x - 10 > x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x - 14 > 0$ (2.16 рәс.).

Җавап. $x \le -2,\ x > 14$.

г) $\sqrt{x^2 - x + 1} < (x-1)^2 + x^2$.

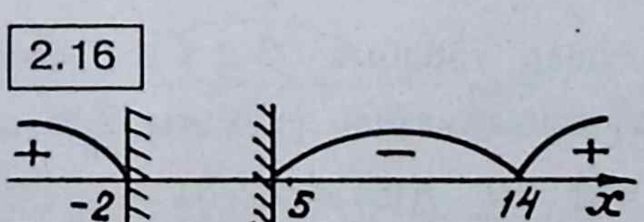
Чишү. МТӨ: $x \in R$.

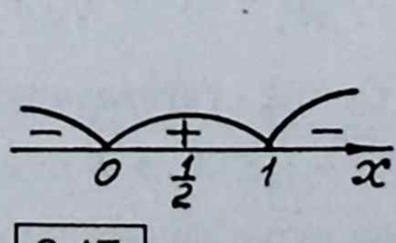
Беренче юл. Әйтик, $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} - (x-1)^2 - x^2$, ул вакытта $f(x) = 0$ тигезләмәсе $\sqrt{x^2 - x + 1} - (x-1)^2 - x^2 = 0$ рәвешен ала. $\sqrt{x^2 - x + 1}$ не t аша билгеләп $(t \ge 0)$, билгесезе t булган тигезләмә табабыз: $2t^2 - t - 1 = 0 \Rightarrow t_1 = -\frac{1}{2}$ (ярамый), $t_2 = 1$. $x^2 - x + 1 = 1$ тигезләмәсен чишәбез: $x_1 = 0,\ x_2 = 1$. Контроль нокталар итеп $-1, \frac{1}{2}, 2$ саннарын алабыз һәм $f(-1) = \sqrt{3} - 5 < 0$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} > 0$, $f(2) = \sqrt{3} - 5 < 0$ тигезсезлекләрен табабыз. $f(x)$ тамгалар схемасы 2.17 рәсемендә сурәтләнгән.

Җавап. $x < 0,\ x > 1$.

Икенче юл. Төп тигезсезлек уң ягының рәвешен үзгәрткәч, болай була: $\sqrt{x^2 - x + 1} < 2\left(x^2 - x + 1\right) - 1$. $\sqrt{x^2 - x + 1} = t > 0$ дип алсак, баштагы тигезләмә $t < 2t^2 - 1$ яки $2t^2 - t - 1 > 0$ рәвешенә килә, биредә $t > 0$. Өчбуынның тамырлары $t_1 = -\frac{1}{2}$, $t_2 = 1$ һәм $t > 0$ булганлыктан, тигезсезлек $t > 1$ булганда гына мөмкин. Димәк,

2.16





2.17

төп тигезсезлек түбәндәге тигезсезлеккә тигезкөчле: $\sqrt{x^2 - x + 1} > 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2 - x > 0$. Моннан $x < 0$, $x > 1$.

Җавап. $x < 0$, $x > 1$.

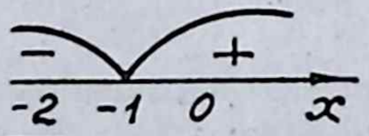
д) $(1 + x)\sqrt{x^2 + 1} > x^2 - 1$.

Чишү. МТӨ: $x \in R$. $f(x) = (1 + x)\sqrt{x^2 + 1} - (x^2 - 1)$ булсын, $f(x) = 0$ тигезләмәсе $(1 + x)\left(\sqrt{x^2 + 1} - (x^2 - 1)\right) = 0$ рәвешен ала.

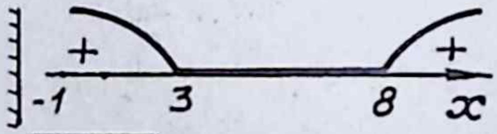
Бу тигезләмә ике тигезләмә җыелмасына тигезкөчле: $\left[\begin{array}{l} 1 + x = 0, \\ \sqrt{x^2 + 1} = x - 1. \end{array}\right.$

Бу тигезләмәләрнең беренчесенең тамыры $x = -1$, ә икенчесенең тамыры юк. $f(0) = 2 > 0$; $f(-2) = -\sqrt{5} - 3 < 0$ булганлыктан, $f(x)$ның тамгалар схемасы 2.18 рәсемендәгечә була.

Җавап. $-1 < x$.



2.18



2.19

е) $\sqrt{x + 5 - 4\sqrt{x + 1}} + \sqrt{x + 10 - 6\sqrt{x + 1}} - 1 > 0$.

Чишү. МТӨ: $x \geq -1$. $f(x) = 0$ тигезләмәсе, ягъни $f(x) = \sqrt{x + 5 - 4\sqrt{x + 1}} + \sqrt{x + 10 - 6\sqrt{x + 1}} - 1$, $\sqrt{x + 1} = t$ $(t > 0)$ дип алсак, түбәндәге рәвештә языла:

$$\sqrt{(t - 2)^2} + \sqrt{(t - 3)^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow |t - 2| + |t - 3| - 1 = 0.$$

Соңгы тигезләмәнең чишелешен табабыз: $2 \leq t \leq 3 \Leftrightarrow 2 \leq \sqrt{x + 1} \leq 3 \Rightarrow 3 \leq x \leq 8$. $f(x)$ның тамгалар схемасы 2.19 рәсемендә сурәтләнгән, биредә $f(0) = 2 > 0$; $f(15) = 2 > 0$.

Җавап. $-1 \leq x < 3$, $8 < x$.

ж) $(x-3)\sqrt{x^2+4} \le x^2-9$.

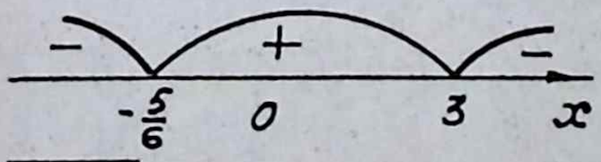
Чишү. МТӨ: $x \in R$. $f(x)=(x-3)\sqrt{x^2+4}-\left(x^2-9\right)$ булсын, ул вакытта безнең тигезсезлек $f(x) \le 0$ рәвешенә килә. $f(x)=0$ тигезләмәсе $x_1=3$, $x_2=-\frac{5}{6}$ тамырларына ия. $f(x)$ функциясенең чыгарылмасын табабыз: $f'(x)=\sqrt{x^2+4}-(x-3)\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}-2x$ һәм $f'(x)$ның $x_1=3$, $x_2=-\frac{5}{6}$ булгандагы кыйммәтен исәплибез: $f'(3)=\sqrt{9+4}-6 \ne 0$, $f'\left(-\frac{5}{6}\right) \ne 0$, чөнки бу очракта барлык кушылучылар да уңай сан. 2 нче теорема буенча $f(x)$ функциясенең тамгалар схемасы — чиратлаша торган схема. Контроль нокта итеп $x=0$ не алабыз, ул вакытта $f(0)=-3\sqrt{4}+9>0$, һәм тамгалар схемасы 2.20 рәсемендә сурәтләнгән рәвешкә керә.

Җавап. $x \le -\frac{5}{6}$, $3 \le x$.

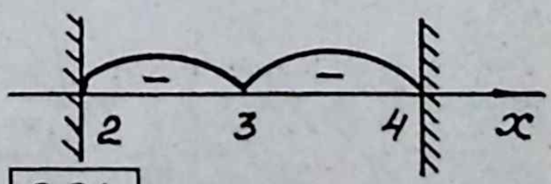
з) $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}<x^2-6x+11$.

Чишү. МТӨ: $2 \le x \le 4$. $f(x)=0$ тигезләмәсен, биредә $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}-\left(x^2-6x+11\right)$, яңа билгесезләр кертү методы белән чишәбез. $\sqrt{x-2}=u$, $\sqrt{4-x}=v$, $(u>0,\ v>0)$ дип алыштырсак, түбәндәге система килеп чыга:

$$\begin{cases} x-2=u^2, \\ 4-x=v^2, \\ u+v-x^2+6x-11=0. \end{cases}$$



2.20



2.21

Беренче ике тигезләмәдән табабыз: $u^2 \cdot v^2 = -x^2 + 6x - 8$ һәм $u^2 + v^2 = 2$; системаның соңгы тигезләмәсен түбәндәге рәвештә язабыз: $u + v + u^2v^2 - 3 = 0$.

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 2, \\ u + v + u^2v^2 = 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2 - 2uv = 2, \\ 4(u+v) + 4u^2v^2 = 12, \end{cases}$$

моннан $4(u+v) + (u+v)^4 - 4(u+v)^2 + 4 = 12$, $u + v = t \geq 0$ дип билгелибез: $t^4 - 4t^2 + 4t - 8 = 0 \Leftrightarrow t^2\left(t^2 - 4\right) + 4(t-2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (t-2)\left(t^3 - 2t^2 + 4\right) = 0$. Бу тигезләмәнең бердәнбер уңай тамыры $t = 2$, һәм $u + v = 2$.

Ул вакытта $f(x) = 0$ тигезләмәсе түбәндәге рәвештә була: $2 - \left(x^2 - 6x + 11\right) = 0 \Rightarrow x = 3$. Шулай итеп, $f(x)$ функциясенең МТӨ ике интервалга таркала: (2, 3), (3, 4). $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}} - 2x + 6$ чыгарылмасы $x = 3$ булганда нульгә тигез. Функциянең тамгалар схемасын төзү өчен $f(x)$ ның һәр интервалдагы тамгасын аныклыйбыз (2.21 рәс.). $f(2) = \sqrt{2} - (4 - 12 + 11) < 0$; $f(4) = \sqrt{2} - (16 - 24 + 11) < 0$, $f(3) = 1 + 1 - (9 - 18 + 11) = 0$.

Җавап. $2 \leq x < 3$, $3 < x \leq 4$.

Күнегүләр

1. $\sqrt{x+7} > 2x - 1$.

2. $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+8} > 3$.

3. $\sqrt{5x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5}$.

4. $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-5} > \sqrt{5-x}$.

5. $\sqrt{7x-13} - \sqrt{3x-19} > \sqrt{5x-27}$.

6. $\sqrt{x+3} > \sqrt{x-9} + \sqrt{5-x}$.

7. $\sqrt{x+6} > \sqrt{x+7} + \sqrt{2x-5}$.

8. $\sqrt{3-x}+\sqrt{x+1}>0{,}5.$

9. $\sqrt{x^2+4x+4}<x+6.$

10. $\sqrt{6-x-x^2}<\sqrt{3x+6}.$

11. $3\sqrt{6+x-x^2}>4x-2.$

12. $\sqrt{x^2-55x+250}<x-14.$

13. $x^2+\sqrt{x^2-3x+5}>3x+7.$

14. $\sqrt{1-x}\le\sqrt[4]{5+x}.$

15. $\sqrt{x^4-2x^2+1}>1-x.$

16. $\frac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}}<0.$

17. $\frac{1-\sqrt{1-8x^2}}{2x}<1.$

18. $\sqrt{2x+1}<\frac{2(x+1)}{2-x}.$

19. $\frac{1-\sqrt{8x-3}}{4x}\ge 1.$

20. $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}<3.$

21. $\frac{(x-1)^2}{\left(3+\sqrt{8+x}\right)^2}>x-7.$

22. $\frac{|x+2|-|x|}{\sqrt{4-x^3}}>0.$

23. $\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{4}}<\frac{1}{x}-\frac{1}{2}.$

24. $\frac{x+\sqrt{x}-2}{x-\sqrt{x}-2}<0.$

25. $\sqrt{x^2+3x+4}>-2.$

26. $\sqrt[4]{x+41}+\sqrt[4]{41-x}>4.$

27. $\sqrt[4]{629-x}+\sqrt[4]{77+x}\ge 8.$

28. $\sqrt[4]{80+x}+\sqrt[4]{2-x}\le 4.$

Җаваплар

1. $-7\le x<2.$

2. $34+2\sqrt{297}<x.$

3. $\frac{5}{2}\le x<15.$

4. $x=5.$

5. $\frac{19}{3}\le x<9.$

6. Чишелеше юк.

7. Чишелеше юк.

8. $-1\le x\le 3.$

9. $-4<x.$

10. $0<x<2.$

11. $-2\le x<2.$

12. $50\le x.$

13. $x<-1;\ 4<x.$

14. $-1\le x\le 1.$

15. $x<-2,\ \ 0<x<1,\ \ 1<x.$

16. $x<\frac{3}{4},\ \ 4<x<7.$

17. $-\frac{1}{2\sqrt{2}} \le x < 0, \ 0 < x < \frac{1}{3}.$

18. $-\frac{1}{2} < x < \frac{11-\sqrt{153}}{4}, \ 0 < x < 2.$ 19. Чишелеше юк.

20. $-\frac{1}{2} \le x < 0, \ 0 < x \le \frac{1}{2}.$

21. $-8 \le x < 8.$ 22. $-1 < x < \sqrt[3]{4}.$

23. $1 < x \le \frac{2}{\sqrt{3}}.$ 24. $1 < x < 4.$

25. $-1 \le x.$ 26. $-40 < x < 40.$

27. $4 \le x \le 548.$ 28. $-80 \le x \le -79, \ 1 \le x \le 2.$

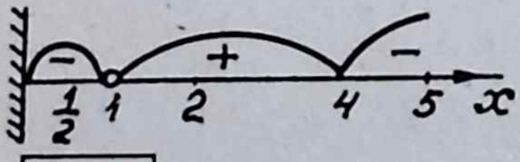
4. КҮРСӘТКЕЧЛЕ һӘМ ЛОГАРИФМИК ТИГЕЗСЕЗЛЕКЛӘР

Мисаллар. а) $\log_4(x+12)\cdot \log_x 2 - 1 \ge 0.$

Чишү. МТӨ: $\begin{cases} x + 12 > 0; \\ x > 0, \ x \ne 1 \end{cases} \Rightarrow x > 0, \ x \ne 1.$

Беренче юл. $\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}, \ \log_4(x+12) = \frac{1}{2}\log_2(x+12)$ булганлыктан, тигезсезлекне түбәндәге рәвештә язарга була: $\frac{1}{2}\frac{\log_2(x+12)}{\log_2 x} - 1 \ge 0$ (чөнки $\frac{\log_c b}{\log_c a} = \log_a b$) яки $f(x) = \log_x(x+12) - 2 \ge 0$;

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0, \ x_1 = -3$ (ярамый); $x_2 = 4$. Контроль нокта итеп $\frac{1}{2}$, 2, 5 саннарын алабыз. Логарифмик функциянең үзлекләре нигезендә (2.22 рәс.) була:



2.22

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_{\frac{1}{2}}\frac{25}{2} - \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \log_{\frac{1}{2}} 50 < 0;$$

$$f(2) = \log_2 14 - 2 = \log_2 \frac{14}{4} = \log_2 \frac{7}{2} > 0;$$

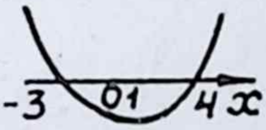
$$f(5) = \log_5 17 - 2 = \log_5 \frac{17}{25} < 0.$$

Җавап. $1 < x \le 4.$

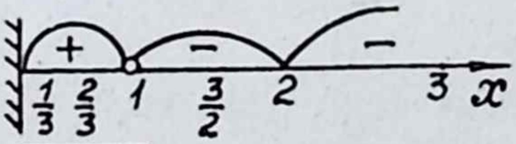
Икенче юл. $\log_4(x+12)\cdot\log_x 2-1\ge 0 \Leftrightarrow \frac{\log_x(x+12)}{\log_x 4}\cdot\log_x 2-1\ge 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_x(x+12)\ge \log_x x \Leftrightarrow \log_x(x+12)\ge \log_x x^2$. Соңгы тигезсезлек түбәндәге тигезсезлеккә тигезкөчле: $x+12\ge x^2$ яки $x^2-x-12\le 0$. $x>1$ булганда, $x+12\le x^2$ яки $x^2-x-12\ge 0$, $x<1$ булганда, $y=x^2-x-12$ функциясенең графигы 2.23 рәсемендә сурәтләнгән, монда $x_1=-3$, $x_2=4$ өчбуынының тамырлары. $x>1$ күплегендә $x\in(1,\ 4)$ кыйммәтләре өчен $x^2-x-12\le 0$ тигезсезлегә үтәлә, ә $0<x<1$ күплегендә $x^2-x-12\ge 0$ тигезсезлегенең чишелеше юк.

Җавап. $1<x\le 4$.



2.23



2.24

б) $\log_x \frac{3x-1}{x^2+1}>0$.

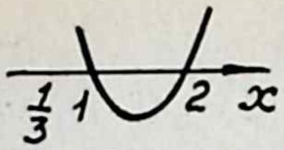
Чишү. МТӨ: $\begin{cases} x>0,\ x\ne 1, \\ 3x-1>0, \end{cases} \Rightarrow x>\frac{1}{3},\ \ x\ne 1.$

Беренче юл. $f(x)=0$ тигезләмәсен чишәбез:

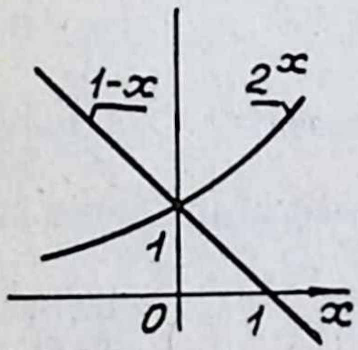
$\frac{3x-1}{x^2+1}=1 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Rightarrow x_1=1;\ x_2=2$. ($x_1$ тамыр була алмый.) Контроль нокталар итеп $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{2}$; 3 саннарын алабыз. Ул вакытта $f\left(\frac{2}{3}\right)=\log_{\frac{2}{3}}\frac{9}{13}>0$; $f\left(\frac{3}{2}\right)=\log_{\frac{3}{2}}\frac{14}{13}>0$; $f(3)=\log_3\frac{8}{10}<0$.

$f(x)$ функциясенең тамгалар схемасы 2.24 рәсемендә бирелгән.

Җавап. $\frac{1}{3}<x<1,\ 1<x<2$.



2.25



2.26

Икенче юл. $x < 1$ булганда, төп тигезсезлек $\log_x \frac{3x-1}{x^2+1} > \log_x 1$ $(\log_x 1 = 0)$ түбәндәге тигезсезлеккә тигезкөчле: $\frac{3x-1}{x^2+1} < 1 \Leftrightarrow 3x - 1 < x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 2 > 0$, ә $x > 1$ булганда, $x^2 - 3x + 2 < 0$ тигезсезлегенә эквивалент.

$y = x^2 - 3x + 2$ функциясенең графигы 2.25 рәсемендә сурәтләнгән, биредә $x_1 = 1$, $x_2 = 2$— өчбуынның тамырлары. $\frac{1}{3} < x < 1$ күплегендә рациональ тигезсезлек теләсә нинди x кыйммәте өчен дә урынлы; ә $x > 1$ күплегендә икенче тигезсезлек $x \in (1, 2)$ кыйммәтләре өчен урынлы.

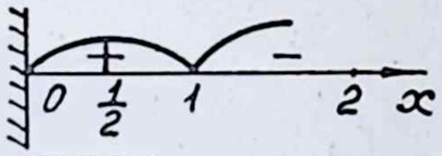
Җавап. $\frac{1}{3} < x < 1$, $1 < x < 2$.

в) $x(1 - lg5) - lg(2^x + x - 1) \geq 0$.

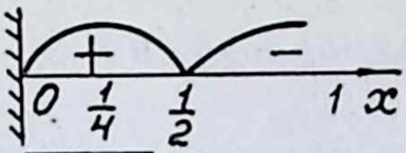
Чишү. МТӨ: $2^x + x - 1 > 0 \Leftrightarrow 2^x > 1 - x \Rightarrow x > 0$ (2.26 рәс.).

Беренче юл. $x(1 - lg5) = x(lg10 - lg5) = x lg2 = lg2^x$ булганлыктан, $f(x) = lg2^x - lg(2^x + x - 1) = 0$ тигезләмәсен чишеп, $x = 1$ не табабыз. Контроль нокталар итеп $\frac{1}{2}$, 2 саннарын сайлыйбыз һәм $f(x)$ ның бу нокталарда тамгаларын ачыклыйбыз: $f\left(\frac{1}{2}\right) = lg\sqrt{2} - lg\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) = lg\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\frac{1}{2}} > 0$, $f(2) = lg4 - lg5 < 0$.

Җавап. $0 < x \leq 1$.



2.27



2.28

Икенче юл. $x(1-lg5)-lg\left(2^x+x-1\right)\geq 0 \Leftrightarrow x\,lg2-lg\left(2^x+\right.$ $\left.+x-1\right)\geq 0 \Leftrightarrow lg2^x \geq lg\left(2^x+x-1\right) \Leftrightarrow 2^x \geq 2^x+x-1 \Leftrightarrow x\leq 1.$

Нәтиҗәдә $x>0$ күплегендә төп тигезсезлек $x\leq 1$ булганда урынлы.

Җавап. $0<x\leq 1.$

г) $\left(\frac{1}{8}\right)^{2+log_2 x} \geq x^3.$

Чишү. МТӨ: $x>0$. Монда $f(x)=\left(\frac{1}{8}\right)^{2+log_2 x}-x^3.$

Төп тигезсезлек $f(x)\geq 0$ рәвешле була. $f(x)$ тигезләмәсе логарифмлап чишелә: $(2+log_2 x)\,log_2\frac{1}{8}=3log_2 x$, моннан $log_2 x=-1$ һәм $x=\frac{1}{2}$. Контроль нокталар итеп 1 һәм $\frac{1}{4}$ саннарын сайлыйбыз һәм бу нокталарда $f(x)$ функциясенең тамгаларын аныклыйбыз: $f(1)=\left(\frac{1}{8}\right)^2-1<0,\ \ f\left(\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{1}{8}\right)^0-\left(\frac{1}{4}\right)^3=1-\frac{1}{64}>0.$

Җавап. $0<x\leq\frac{1}{2}.$

Күнегүләр

1. $2log_8(x-2)-log_8(x-3)>\frac{2}{3}.$

2. $log_2\left(1+log_{1/9}x-log_9 x\right)<1.$

3. $\left|3-log_2 x\right|<2.$

4. $2^{log^2_{0,5}x}+x^{log_{0,5}x}>2{,}5.$

5. $0{,}4^{log_3\frac{3}{x}\cdot log_3 3x}>6{,}25^{log_3 x^2+2}.$

6. $0{,}3^{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots} < \sqrt[3]{0{,}3^{3x^2+5x}} < 1.$

7. $log_{\frac{1}{2}}log_2 log_{x-1}9 > 0.$

8. $25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x > 25.$

9. $\left|2^{4x^2-1} - 5\right| \le 3.$

10. $log_{1/2}(x-3) - log_{1/2}(x+3) - log_{(x+3)(x-3)}2 > 0.$

11. $log_3 log_{x^2} log_{x^2} x^4 > 0.$

12. $log_x \frac{3}{8-2x} \ge -2.$

13. $\sqrt{x^{log_2\sqrt{x}}} > 2.$

14. $log_x\left(x^2 + 3x - 3\right) > 1.$

15. $(x-3)^{-7x+2x^2} \ge 1.$

16. $log_5\left(-1 + 26 \cdot 5^{x-2}\right) > 2x - 2.$

17. $\left|log_3 x\right| < \left|log_3 \frac{x}{9}\right|.$

18. $\frac{1}{log_2(x-1)} < \frac{1}{log_2\sqrt{x+1}}.$

19. $log_3 \frac{3x-5}{x+1} < 1.$

20. $\frac{lg7 - lg\left(-8x - x^2\right)}{lg(x+3)} > 0.$

Жаваплар

1. $3 < x < 4;\ 4 < x.$

2. $\frac{1}{3} < x < 3.$

3. $2 < x < 32.$

4. $0 < x < \frac{1}{2},\ 2 < x.$

5. $0 < x < \frac{1}{3},\ 243 < x.$

6. $-2 < x < -\frac{5}{3},\ 0 < x < \frac{1}{3}.$

7. $4 < x < 10.$

8. $0 < x < 2.$

9. $-1 < x < \frac{-1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1.$

10. $3 < x < 9.$

11. $-\sqrt{2} < x < -1,\ 1 < x < \sqrt{2}.$

12. $0 < x < 1;\ \frac{4}{3} \le x < 4.$

13. $0 < x < \frac{1}{4};\ 4 < x.$

14. $\frac{\sqrt{21}-3}{2} < x < 1;\ 1 < x.$

15. $3 < x \le \frac{7}{2};\ 4 \le x.$

16. $0 < x < 2$.

17. $0 < x < 3$.

18. $1 < x < 2, \ 3 < x$.

19. $\frac{5}{3} < x$.

20. $-3 < x < -2; \ -1 < x$.

5. ТРИГОНОМЕТРИК ТИГЕЗСЕЗЛЕКЛӘР

Башта иң гади тригонометрик тигезсезлекләрне, ягъни түбәндә күрсәтелгән тигезсезлекләрне карыйбыз:

$$\sin x \vee a; \quad \cos x \vee a; \quad \operatorname{tg} x \vee c; \quad \operatorname{ctg} x \vee c,$$

биредә $\vee$ символы $<, >, \leq, \geq$ символларының берсен сурәтли. Мондый тигезсезлекләрне чишү өчен тиңдәш тригонометрик функцияләрнең графигыннан яки тригонометрик әйләнәдән файдалану уңайлы. Тригонометрик тигезсезлекләрнең барлык чишелешләрен табу өчен аның чишелешен берәр аралыкта язу кирәк һәм шул җитә дә. Бу аралыкның озынлыгы тиңдәш тригонометрик функциянең периодына тигез булырга тиеш һәм соңыннан аның периодик функция икәнен игътибарга алу кирәк. Кайбер иң гади тригонометрик тигезсезлекләрне эшлик.

Мисаллар. а) $\sin x > \frac{1}{2}$.

Чишү. Синусның периоды 2π булганлыктан, чишелешне озынлыгы 2π булган теләсә нинди арада язу һәм аннан соң $\sin x$ның периодын игътибарга алу җитә.

2.29 рәсеменнән күренгәнчә, $x_1 < x < x_2$, биредә x_1 һәм x_2 $\sin x = \frac{1}{2}$ тигезләмәсенең чишелеше, $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{5\pi}{6}$.

Синус функциясенең периодын исәпкә алып табабыз:

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k.$$

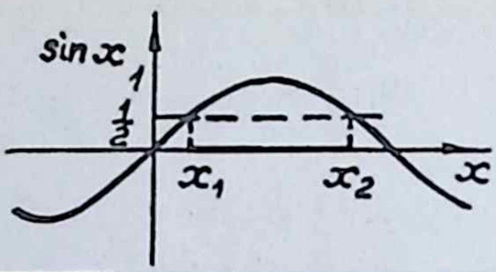
Җавап. $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \ k \in Z$.

б) $\cos x \geq 0$.

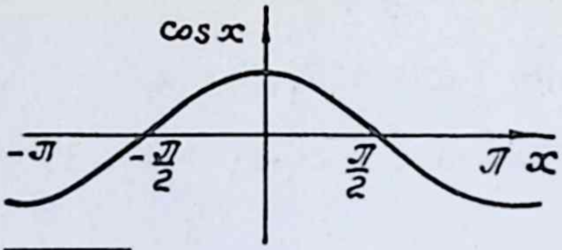
Чишү. $[-\pi, \pi]$ кисемтәсендә тигезсезлекнең чишелеше (2.30 рәс.): $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Косинусның периодын исәпкә алабыз.

Җавап. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k,$

$k \in Z$.



2.29

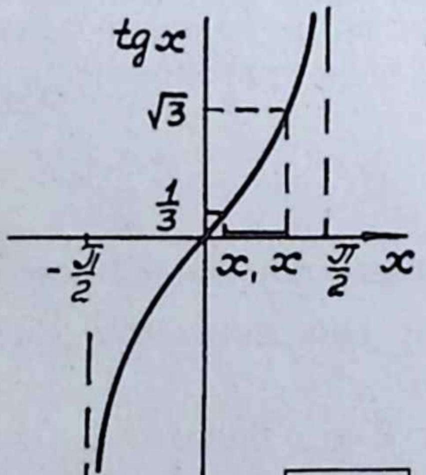


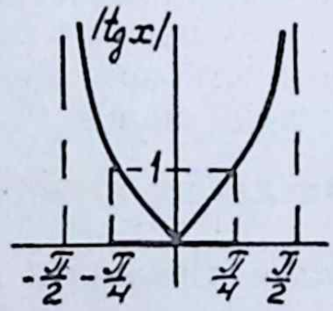
2.30

в) $\frac{1}{3} \leq \operatorname{tg} x \leq \sqrt{3}$.

Чишү. МТӨ: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$. 2.31 рәсеменнән күренгәнчә, $x_1 \leq x \leq x_2$, биредә $x_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$, $x_2 = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$.

Җавап. $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + k\pi$; $k \in Z$.





2.32

2.31

г) $|\sin x| < |\cos x|$.

Чишү. Беренче юл. Тигезсезлекнең ике ягын да $|\cos x| \neq 0$ гә бүлеп, эквивалент тигезсезлек табабыз (әгәр $\cos x = 0$ булса, $|\sin x| < 0$ була, ә бу мөмкин түгел). $|\operatorname{tg} x| < 1$.

Җавап. $-\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{\pi}{4} + \pi k$,
$k \in Z$.

Икенче юл. Бу тигезсезлек түбәндәге тигезсезлеккә эквивалент (ни өчен?). $\cos^2 x - \sin^2 x > 0 \Leftrightarrow \cos 2x > 0$.

Моннан ("б" мисалын кара) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < 2x < \frac{\pi}{2} < 2\pi k$. Нәтиҗәдә алдагы җавап табыла.

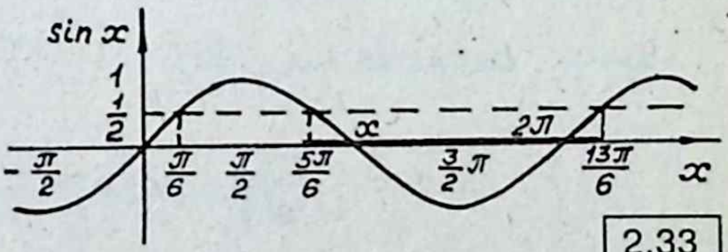
д) $\left|\sin x + \frac{1}{2}\right| \le 1$.

Чишү. Бу икеләтелгән тигезсезлеккә тигезкөчле:

$$-1 \le \sin x + \frac{1}{2} \le 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \le \sin x \le \frac{1}{2}.$$

Соңгы тигезсезлекнең сул ягы ачыктан-ачык күренә, чөнки $-\frac{3}{2} < -1 \le \sin x \ (x \in R)$. Шуның өчен эш $\sin x \le \frac{1}{2}$ тигезсезлеген чишүгә кайтып кала. Бу мисалда чишелешне $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ кисемтәсендә язу уңайрак (2.33 рәс.), әгәр $[0; 2\pi]$ кисемтәсен карасак, монда чишелеш $0 \le x \le \frac{\pi}{6}$ һәм $\frac{5\pi}{6} \le x \le 2\pi$ чишелешләрен берләштерүдән килеп чыгар һәм җавапны язу гаять катлаулы булыр иде.

Җавап. $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \le x \le \frac{13\pi}{6} + 2\pi k, \ k \in Z$.



2.33

Еш кына тригонометрик тигезсезлекне, уңышлы алыштырулар кулланып, алгебраик тигезсезлеккә (рациональ яки иррациональ) китерергә була, ә соңгысы исә югарыда каралган ысуллар белән чишелә.

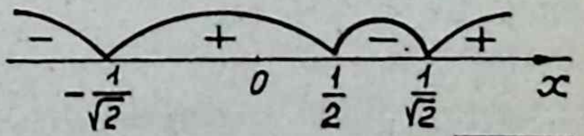
Мисаллар. а) $2\sin^2 x - \sin x + \sin 3x < 1$.

Чишү. $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ булганлыктан, бу тигезсезлек түбәндәге тигезсезлеккә эквивалентлы: $-4\sin^3 x + 2\sin^2 x + 2\sin x - 1 < 0$ яки, $\sin x = t$ дип алсак, $4t^3 - 2t^2 - 2t + 1 > 0 \Leftrightarrow 2t^2(2t-1) - (2t-1) > 0 \Leftrightarrow (2t-1)(2t^2-1) > 0 \Leftrightarrow (2t-1)(\sqrt{2}t-1)(\sqrt{2}t+1) > 0$.

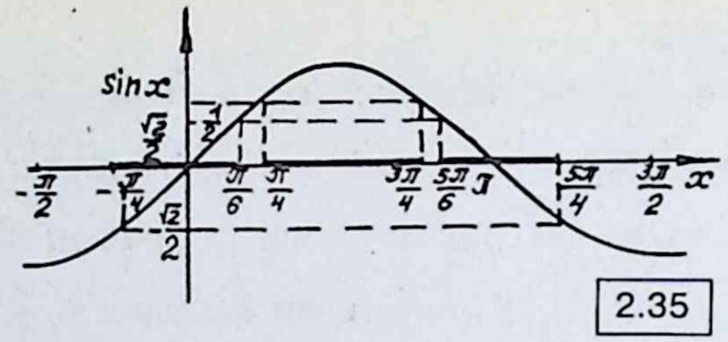
Бу тигезсезлекне интерваллар ысулы белән чишеп табабыз (2.34 рәс.): $-\frac{\sqrt{2}}{2} < t < \frac{1}{2}, \ \frac{\sqrt{2}}{2} < t$.

Нәтиҗәдә x өчен тигезсезлекләр җыелмасы хасил була:

$$\left[\begin{array}{l} -\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin x < \frac{1}{2}, \\ \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin x. \end{array}\right.$$



2.34



Җавапны 2.35 рәсеменнән чыгып табабыз.

Җавап. $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi k;$

$\frac{\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi k;$

$\frac{5\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{4} + 2\pi k;\ k \in Z.$

б) $\sin 4x + \cos 4x \cdot \mathrm{ctg} 2x > 1.$

Чишү. Беренче юл. МТӨ: $x \neq \frac{\pi k}{2}.$

$$\sin a = \frac{2\mathrm{tg}\frac{a}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{a}{2}}, \quad \cos a = \frac{1-\mathrm{tg}^2\cdot\frac{a}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{a}{2}} \qquad (2.1)$$

формулаларын файдаланып, тигезсезлекне түбәндәге рәвештә язабыз:

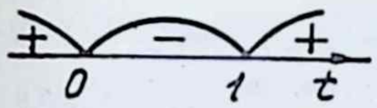
$$\frac{2\mathrm{tg}2x}{1+\mathrm{tg}^2 2x} + \frac{1-\mathrm{tg}^2 2x}{1+\mathrm{tg}^2 2x}\frac{1}{\mathrm{tg}2x} > 1.$$

$\mathrm{tg}2x = t$ дип алып рәвешүзгәрткәннән соң:

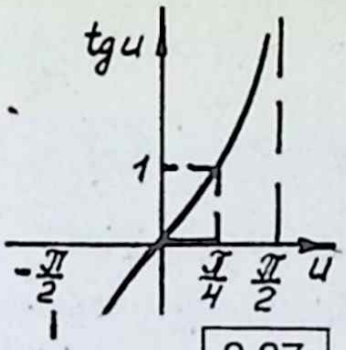
$$\frac{t^3-t^2+t-1}{t(t^2+1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{(t-1)(t^2+1)}{t(t^2+1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{t-1}{t} < 0.$$

Соңгы тигезсезлеккә интерваллар методын кулланабыз: $0 < t < 1 \Leftrightarrow 0 < \mathrm{tg}2x < 1$ (2.36 рәс.). 2.37 рәсеме ярдәмендә язабыз: $k\pi \le 2x < \frac{\pi}{4} + k\pi.$

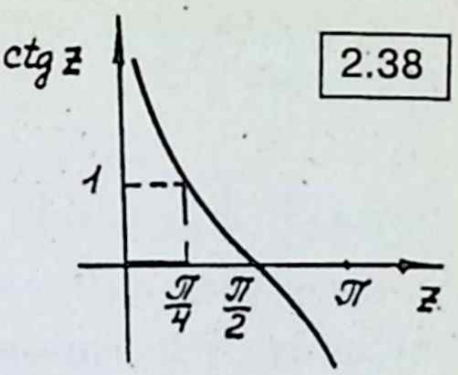
Җавап. $\frac{\pi k}{2} < x < \frac{\pi}{8}(1 + 4k),\ k \in Z.$



2.36



2.37



2.38

Искәрмә. (2.1) формулалары белән бирелгән алыштырма $a = \pi + 2\pi k$ яки (чөнки $a = 4x$) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ булганда мәгънәсен югалта, ә бу кыйммәтләрнең тамыр булулары мөмкин. Ләкин тикшерү күрсәткәнчә (үзегез тикшерегез), x ның бу кыйммәтләре тамыр булмый.

Икенче юл. Төп тигезсезлекнең МТӨ дә түбәндәге тигезсезлеккә эквивалент: $\sin 4x + \cos 4x \frac{\cos 2x}{\sin 2x} > 1 \Leftrightarrow \frac{\sin 4x \sin 2x + \cos 4x \cos 2x}{\sin 2x} > 1$

$\Leftrightarrow \frac{\cos 2x}{\sin 2x} > 1 \Leftrightarrow \mathrm{ctg} 2x > 1.$

Моннан $k\pi < 2x < \frac{\pi}{4} + k\pi$ (2.38 рәс.).

Җавап. $\frac{k\pi}{2} < x < \frac{\pi}{8}(1 + 4k),\ k \in Z.$

Шуны әйтеп китик, кайвакытта тригонометрик тигезсезлекне алгебраик тигезләмәгә тиз генә әйләндереп булмый, булган тәкъдирдә дә, рәвеше үзгәртелгән тигезсезлек тикшерүгә авыр бирелә, шуның өчен мондый очракларда интервал методын турыдан-туры төп тигезсезлеккә куллану уңышлырак.

Алдагы мисалларны чишүгә керешкәнче, кайбер теоретик төшенчәләрне карап узыйк. Гадилек өчен

$$F(\sin(a_1 x + b_1),\ \cos(a_2 x + b_2)) \vee 0 \qquad (2.2)$$

рәвешле тигезсезлекне карыйк. Биредә F үз аргументларының рациональ функциясе (икенче төрле әйткәндә, $\sin(a_1 x + b_1)$, $\cos(a_2 x + b_2)$ функцияләре белән дүрт арифметик гамәл генә эшләнә. Уңай натураль дәрәҗәгә күтәрүне тапкырлауның бер төре дип карап була: $a_1, a_2 \in Q,\ b_1, b_2 \in R$, биредә $a_1 = \frac{p_1}{q_1},\ a_2 = \frac{p_2}{q_2}$. (2.2) тигезсезлегенең периоды дип катлаулы функциянең периодын кабул итәрбез, биредә $F(x) = F(\sin(a_1 x + b_1),\ \cos(a_2 x + b_2))$.

Билгеле булганча, әгәр билгеләнү өлкәсендәге теләсә нинди x өчен функциянең $x,\ x+T,\ x-T$ нокталарындагы кыйммәтләре тигез, ягъни

$$F(x+T) = F(x) \qquad (2.3)$$

булса, F функциясен периоды T булган периодик функция дип атыйлар. Әгәр T $F(x)$ функциясенең периоды булса, $nT(n \in Z,\ n \neq 0)$ шулай ук бу функциянең периоды икәнен исбатларга мөмкин. Тригонометрик тигезсезлекләрне эшләгәндә, исәпләүләрнең күләмен кимету максаты белән, иң кечкенә уңай периодны — $T_{\min}$ ны табу кирәк.

Мисал. Функциянең периодын табыгыз: $F(x) = \sin ax,\ a \in R.$

(2.3) тигезлеге бу функция өчен түбәндәгечә: $\sin a(x+T) = \sin ax \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin a(x+T) - \sin ax = 0 \Leftrightarrow 2\cos\left(ax + \frac{aT}{2}\right)\sin\frac{aT}{2} = 0.$ Бу тигезлек теләсә нинди x өчен урынлы, әгәр $\sin aT/2 = 0 \Rightarrow \frac{aT}{2} = \pi k,$

$T = \frac{2\pi k}{a},\ a \in Z.$ Димәк, $T_{\min} = 2\pi/a.$

Хәзер (2.2) тигезсезлегенә әйләнеп кайтыйк, $F(x)$ катлаулы периодик функция һәм аның периоды түбәндәге формула белән билгеләнә:

$$T = 2\pi\frac{q}{p}, \qquad (2.4)$$

биредә p зурлыгы p_1 һәм p_2 саннарының иң зур уртак бүлүчесе (ИЗУБ), ә q исә — q_1 һәм q_2 саннарының иң кечкенә уртак кабатлысы (ИКУК).

Мисал. 16, 20, 28 саннарының ИКУК һәм ИЗУБ ләрен табыгыз.

Чишү. Монда $16 = 2^4,\ 20 = 2^2 \cdot 5,\ 28 = 2^2 \cdot 7.$

16 саны өчен гади тапкырлаучылар күплеген $A_1 = \{2;\ 2;\ 2;\ 2\}$ аша тамгалыйк, 20 һәм 28 саннары өчен тиңдәш язылыш — $A_2 = \{2;\ 2;\ 5\}$ һәм $A_3 = \{2;\ 2;\ 7\}$ булыр.

Моннан $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{2,\ 2\};\ A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 5,\ 7\}.$

Димәк, ИЗУБ $= 2 \cdot 2 = 4$, ИКУК $2^4 \cdot 5 \cdot 7 = 560.$

Хәзер югарыда (2.4) формуласы белән күрсәтелгән расламаны исбатлыйк. Аның өчен $\sin(a_1 x + b_1)$ функциясен карыйбыз. (2.4) фор-

муласы белән күрсәтелгән T саны бу функциянең периоды була, ягъни теләсә нинди x өчен (2.3) формуласына тиңдәш тигезлек урынлы:

$$\sin\left(a_1(x+T)+b_1\right)=\sin\left(a_1x+b_1\right). \qquad (2.5)$$

Чыннан да, $\sin\left(a_1(x+T)+b_1\right)=\sin\left(a_1x+b_1+a_1T\right)$. Монда $a_1T=a_1 2\pi\frac{q}{p}=2\pi\frac{p_1}{q_1}\frac{q}{p}=2\pi\frac{p_1}{p}\frac{q}{q_1}$.

Ләкин $\frac{p_1}{p}$ — бөтен сан, чөнки p—p_1 һәм p_2 саннары өчен ИЗУБ; q/q_1 шулай ук бөтен сан, чөнки q—q_1 һәм q_2 саннары өчен ИКУК. Шулай итеп, a_1T санын $2\pi k\,(k\in z)$ рәвешендә язарга мөмкин, ә бу (2.5) тигезлегенә китерә.

Шулай ук $\cos\left(a_2x+b_2\right)$ функциясе өчен дә T саны период булып тора. Ә бу вакытта $T=2\pi\frac{p}{q}$ $F(x)$ функциясенең дә периоды булып тора, чөнки $F\left(\sin\left(a_1x+b_1+a_1T\right),\ \cos\left(a_2x+b_2+a_2T\right)\right)=$ $F\left(\sin\left(a_1x+b_1\right),\ \cos\left(a_2x+b_2\right)\right)$.

Мисал. Функциянең периодын табыгыз: $F(x)=\sin\left(\frac{15}{2}x+\frac{\pi}{11}\right)\times$ $\times\cos\left(\frac{3}{8}x\right)$.

Монда $a_1=\frac{15}{2}\Rightarrow p_1=15,\ q_1=2;\ a_2=\frac{3}{8}\Rightarrow p_2=3,\ q_2=8;$

ИЗУБ$=p=3$, ИКУК$=q=8$. Димәк, $T=2\pi\frac{8}{3}=\frac{16}{3}\pi$.

Искәрмә. Әгәр a_1 һәм a_2 натураль сан булсалар, ул вакытта $q=1$ һәм $T=\frac{2\pi}{p}$ тигезсезлекнең периоды була.

Мисал. $F(x)=\sin^2 4x\cos^3 2x$ функциясенең периодын табыгыз.

Монда $a_1=4,\ a_2=2\Rightarrow p=2;\ T=2\pi/2=\pi$.

Искәрмә. Гомумән алганда, (2.4) формуласы $F(x)$ функциясенең иң кечкенә периодын билгеләми. Түбәндәге мисалда күренгәнчә,

кайбер очракта иң кечкенә периодны бердәй рәвешүзгәртүләр кулланып табалар.

Мисал. $F(x) = \sin^2 x$. Монда $a_1 = p_1 = 1 \Rightarrow$ ИЗУБ$=1$. $T = 2\pi$. Ләкин бу иң кечкенә период түгел. $F(x)$ ны үзгәртәбез: $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$; $\cos 2x$ өчен $T_{\min} = \frac{2\pi}{2} = \pi$, димәк, иң кечкенә период π гә тигез.

Мисал. Тигезсезлекне чишегез: $\sin 3x \cos 2x < 0$.

Монда $a_1 = p_1 = 3$; $a_2 = p_2 = 2 \Rightarrow p = 1$, $T = 2\pi$.

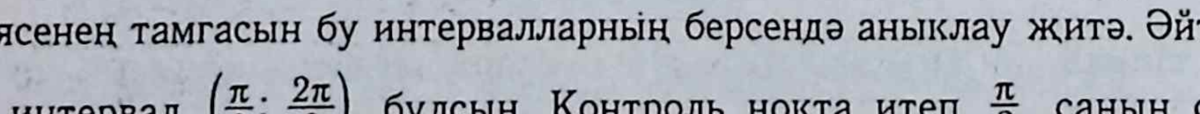
Бу тигезсезлекне интерваллар методы белән чишәбез: $F(x) = \sin 3x \cos 2x = 0$. 1) $\sin 3x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi k}{3}$; 2) $\cos 2x = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$. $[0,\ 2\pi]$ кисемтәсендә $F(x)$ функциясенең ун тамыры бар: $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{\pi}{3}$, $x_3 = \frac{2\pi}{3}$, $x_4 = \frac{3\pi}{4}$, $x_5 = \pi$, $x_6 = \frac{5\pi}{4}$, $x_7 = \frac{4\pi}{3}$, $x_8 = \frac{5\pi}{3}$, $x_9 = \frac{7\pi}{4}$, $x_{10} = 2\pi$.

$F(x)$ ның чыгарылмасын табабыз:

$$F'(x) = 3\cos 3x \cos 2x - 2\sin 3x \sin 2x;$$

$$F'\left(\frac{\pi k}{3}\right) = 3\cos \pi k \cdot \cos\frac{2\pi k}{3} \neq 0 \quad (k = 1, \ldots, 6);$$

$$F'\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right) = -2\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi k}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) \neq 0, \quad (k = 0, 1, 2, 3).$$



2.39

2 нче теорема буенча, тамгалар схемасын төзү өчен $F(x)$ функциясенең тамгасын бу интервалларның берсендә аныклау җитә. Әйтик, бу интервал $\left(\frac{\pi}{3};\ \frac{2\pi}{3}\right)$ булсын. Контроль нокта итеп $\frac{\pi}{2}$ санын сайлыйбыз. Ул вакытта $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{3\pi}{2}\cos\frac{2\pi}{2} = (-1)(-1) > 0$.

$F(x)$ ның тамгалар схемасы 2.39 рәсемендә сурәтләнгән.

Җавап. $\frac{\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi k;\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,$

$\pi + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{4} + 2\pi k,\ \frac{4\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi k;$

$\frac{7\pi}{4} + 2\pi k < x < 2\pi(k+1).\ k \in Z.$

Хәзер кире тригонометрик функцияләр кергән тигезсезлекләрне чишәбез.

Мисал. Тигезсезлекне чишегез: $\arccos x > \operatorname{arctg} x$.

Чишү. МТӨ: $|x| \le 1$. 2.40 рәсеменнән күренгәнчә, тигезсезлекнең чишелеше $-1 \le x < x_0$ була, биредә x_0 $\arccos x = \operatorname{arctg} x$ тигезләмәсенең тамыры. Тигезләмәне чишү өчен ике якның да косинусын табабыз. $\cos(\arccos x) = \cos(\operatorname{arctg} x) \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, рәвеш үзгәрткәннән соң: $x^4 + x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

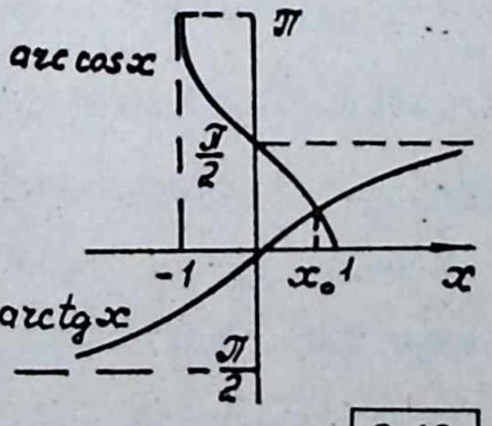
Җавап. $-1 \le x < \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Бу параграфның азагында катнаш тигезсезлекне карыйк, аны шулай ук интерваллар методын кулланып чишү уңайлы.

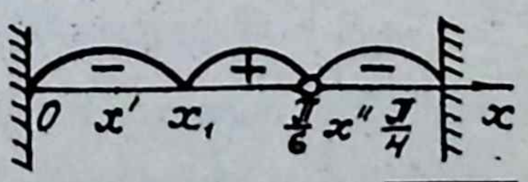
Мисал. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ булганда тигезсезлекне чишегез:

$$\log_{2\sin x}\sqrt{\cos 2x} \le \frac{1}{2}.$$

Чишү. МТӨ: $\begin{cases} \cos 2x > 0, \\ \sin x > 0, \Rightarrow 0 < x < \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4}, \\ \sin x \ne \frac{1}{2}. \end{cases}$



2.40

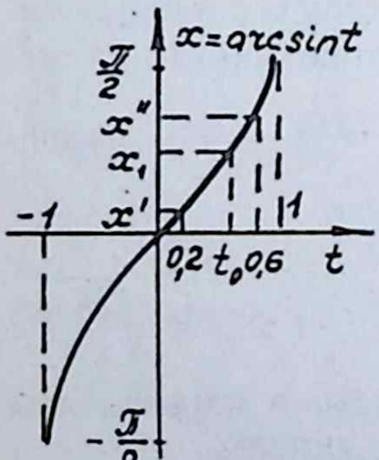


2.41

Беренче юл. $f(x) = log_{2\sin x}\sqrt{\cos 2x} - \frac{1}{2} = log_{2\sin x}\sqrt{\frac{\cos 2x}{2\sin x}}$. Түбәндәге тигезләмәне чишәбез: $\sqrt{\frac{\cos 2x}{2\sin x}} = 1 \Leftrightarrow \cos 2x = 2\sin x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0 \Rightarrow (\sin x)_1 = -\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ (ярамый), $(\sin x)_2 =$

$= -\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Соңгы тигезләмә $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ кисемтәсендә бердәнбер тамырга ия: $x_1 = \arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.



2.42

Контроль нокта итеп $(0, x_1)$ интервалында $x = \arcsin 0{,}2$ санын сайлыйбыз (2.41, 2.42 рәс.). $\sin\arcsin t = t$ булганлыктан, $\cos(2\arcsin 0{,}2) = 1 - 2\sin^2(\arcsin 0{,}2) = 1 - 2(0{,}2)^2$ һәм $f(x) =$

$$= log_2 \sin(\arcsin 0{,}2)\sqrt{\frac{\cos 2(\arcsin 0{,}2)}{2\sin(\arcsin 0{,}2)}} =$$

$$= log_{2\cdot 0{,}2}\sqrt{\frac{1-2\cdot(0{,}2)^2}{2\cdot 0{,}2}} = log_{0{,}4}\sqrt{\frac{24}{10}} < 0.$$

$\left(x_1; \frac{\pi}{6}\right)$ интервалында $f(x)$ ның тамгасы уңай була; $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$ интервалында контроль нокта итеп $x'' = \arcsin 0{,}6$ санын сайлыйбыз. Ул вакытта $f(x'') = log_{2\cdot 0{,}6}\sqrt{\frac{1-2(0{,}6)^2}{2\cdot 0{,}6}} = log_{1{,}2}\sqrt{\frac{7}{30}} < 0$.

Җавап. $0 < x < \arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}$, $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4}$.

Икенче юл. $\frac{1}{2}log_{2\sin x}\cos 2x \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow log_{2\sin x}\cos 2x \le 1$. Әйтик, $0 < x < \frac{\pi}{6}$, $\cos 2x \ge 2\sin x \Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 \le 0$, $0 < \sin x < \frac{\sqrt{3}-1}{2} \to 0 < x < \arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Әгәр $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4}$ булса, $\cos 2x \le 2\sin x$. Бу очракта теләсә нинди x булганда да $2\sin^2 x + 2\sin x - 1 \ge 0$ тигезсезлеге урынлы, чөнки $2\sin^2 x > 0$, $2\sin x > 1$.

Җавап. $0 < x < \arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}$, $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4}$.

Күнегүләр

1. $\sin x - 3\cos x < 0.$

2. $|\sin x + \cos x| < \frac{1}{\sqrt{2}}.$

3. $|\sin x| \cdot \cos x > \frac{1}{4}.$

4. $3^{\operatorname{tg}x} > 3^{\cos x}$

5. $(\arcsin x)^2 - \frac{\pi}{6} \cdot \arcsin x - \pi^2/_{18} < 0.$

6. $2\cos x\left(\cos x - \sqrt{8}\operatorname{tg}x\right) < 5.$

7. $2 < 2^{\left(\frac{\sin x}{1-\cos x}\right)^2} < 8.$

8. $2\sin^2 x - \sin x + \sin 3x < 1.$

9. $4\sin x \sin 2x \cdot \sin 3x > \sin 4x.$

10. $|\sin x + \cos x| \geq \sqrt{2}.$

11. $log_{0,75} \sin x \geq log_{\frac{9}{16}} 0{,}75.$

12. $\sqrt{\cos x - \sin x} \geq \sin x - \frac{1}{2}.$

13. $log_{\sin x}\operatorname{tg}x < 2log_{\operatorname{tg}x} \sin x + 1.$

14. $log_{\frac{\cos x}{\sqrt{2}}}\left(\frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{2}\right) \leq 2.$

15. Әгәр $-\pi < x < \pi$ булса, тигезсезлекне чишегез:

$$\frac{lg 2 + lg\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{lg(\sin x + \cos x)} > -1.$$

Җаваплар

1. $\operatorname{arctg}3 + (2k-1)\pi < x < \operatorname{arctg}3 + 2\pi k.$

2. $\frac{7\pi}{12} + \pi k < x < \frac{11\pi}{12} + \pi k.$

3. $-\frac{5\pi}{12} + 2\pi k < x < -\frac{\pi}{12} + 2\pi k, \quad \frac{\pi}{12} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{12} + 2\pi k.$

4. $\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k,$

$-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2} + (2k+1)\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k.$

5. $-\frac{1}{2} < x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad \frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$.

7. $\frac{\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad \frac{3\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi k$.

8. $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \; \frac{\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,$

$\frac{5\pi}{6} + 2\pi k < x \le \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$.

9. $-\frac{\pi}{8} + \pi k < x < \pi k, \; \frac{\pi}{8} + \pi k < x < \frac{3\pi}{8} + \pi k, \; \frac{\pi}{2} + \pi k < x < \frac{5\pi}{8} + \pi k$.

10. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$. 11. $2\pi k < x \le \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \le x < \pi(2k+1)$.

12. $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \le x \le \arccos\frac{\sqrt{6}-1}{2} + 2\pi k$.

13. $2\pi k < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \; \arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

14. $x = 2\pi k$. 15. $-\frac{\pi}{4} < x < -\frac{\pi}{8}, \; 0 < x < \frac{\pi}{8}$.

6. ИНТЕРВАЛЛАР МЕТОДЫНА КАРАТА БЕРНИЧӘ ФИКЕР

Интерваллар методының төп әһәмияте — тигезсезлекләрне тиңдәш тигезләмә чишүгә кайтарып калдыру. Бу метод белән рациональ, иррациональ, тригонометрик тигезсезлекләрне чишү уңайлы, аны башка төр тигезсезлекләр чишүдә дә кулланып була. Мәсәлән, күрсәткечле, логарифмик, "катнаш" тигезсезлекләр. Ләкин теләсә нинди универсаль метод кебек, бу метод һәрвакытта да уңай түгел, чөнки кайбер очракта контроль нокталарда $f(x)$ ның тамгасын аныклау (монда сүз таблица, логарифмик линейкалар, калькуляторлар һәм башка шундый төр җайланмалар кулланмыйча исәпләү турында бара) шактый авыр эшкә әйләнергә мөмкин.

Шуның өчен бу очракларда, вакыт сарыф итмәү күзлегеннән чыгып, гадәти методлар куллану уңайлырак. Бу вакытта тигезсезлекләрнең һәм аңа кергән элементар функцияләрнең үзлекләренә таянып эш итәләр.

Нинди типтагы тигезсезлекләр булуга карамастан, мондый тәкъдимне истә тотарга тырышыгыз: әгәр җайлы алыштырма ярдәмендә бирелгән тигезсезлекне рациональ тигезсезлеккә китереп булса, тигезсезлекне яңа билгесез кертеп чишәргә, аннан соң x билгесезенә кайту кирәк. Моны мисалда аңлатыйк.

Мисал. $15^{log_5 3} \cdot x^{log_5 9x+1} \le 1.$

Чишү. МТӨ: $x > 0$. Әйтик, $f(x) = 15^{log_5 3} \cdot x^{log_5 9x+1} - 1 \le 0.$

$f(x)$ тигезләмәсе болай була: $15^{log_5 3} \cdot x^{log_5 9x+1} = 1.$

5 нигезе буенча логарифмлыйбыз:

$log_5 3 \cdot log_5 15 + (log_5 9x + 1) log_5 x = 0.$ $log_5 15 = 1 + log_5 3.$ $log_5 9x + 1 = 2 log_5 3 + log_5 x = 1$ булганлыктан файдаланып һәм $log_5 x = t$, $log_5 3 = a$ дип алып, түбәндәге тигезләмәне табабыз: $t^2 + (2a + 1)t + a(a + 1) = 0 \Rightarrow t_1 = -(1 + a),\ t_2 = -a.$

1) $log_5 x = -(1 + a) = -(1 + log_5 3) = -log_5 15 \Rightarrow x_1 = 1/15.$

2) $log_5 x = -a = -log_5 3 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{3}.$

МТӨ бу тамырлар белән өч арага бүленә (2.43 рәс.). Контроль нокталар итеп $\frac{1}{25}$; $\frac{3}{15}$; 1 саннарын сайлыйбыз.

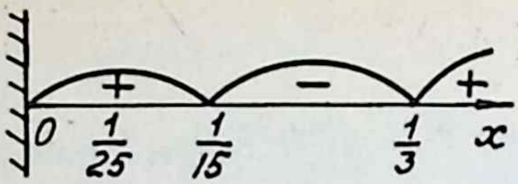
Исәплибез: $f\left(\frac{1}{25}\right) = 15^{log_5 3}\left(\frac{1}{25}\right)^{log_5 \frac{9}{25}+1} - 1 = 3^{log_5 3} \cdot 5^{log_5 3} \times \times 5^{-2\left(log_5 \frac{9}{25}+1\right)} - 1 = 3^{log_5 3+1} \cdot 5^{-2}\left(\frac{9}{25}\right)^{-2} - 1 = \frac{3}{25} \cdot 3^{log_5 3}\left(\frac{25}{9}\right)^2 - 1 = = \frac{75}{81} \cdot 3^{log_5 3} - 1.$

Хәзер соңгы аңлатманың тамгасын билгелибез. Аны тискәре сан дип фараз итәбез: $\frac{75}{81} \cdot 3^{log_5 3} < 1 \Leftrightarrow 5^2 \cdot 3^{-3+log_5 3} < 1.$

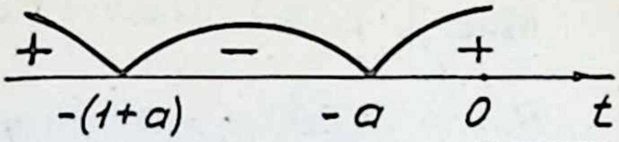
Бу тигезсезлектән нигезе 5 булган логарифм алабыз: $2 + (-3 + log_5 3) log_5 3 < 0$ яки $log_5^2 3 - 3 log_5 3 + 2 < 0 \Rightarrow 1 < \log_5 3 < < 2 \Leftrightarrow 5 < 3 < 25$, ә бу мөмкин түгел. Димәк, $f(1/25) > 0$. Шундый ук авыр һәм катлаулы хисаплау ярдәмендә $f(3/15) < 0$ икәнен табу кирәк.

Шулай итеп, без бу мисалны төп тигезсезлеккә турыдан-туры интерваллар методын кулланып чиштек. Ә аны түбәндәге ысул белән чишү уңайлырак. Тигезсезлекне 5 нигезе буенча логарифмлыйбыз:

$log_5 3 \cdot log_5 15 + (log_5 9x + 1) log_5 x \le 0$ яки $t^2 + (2a+1)t + a(a+1) \le 0 \Leftrightarrow (t + 1 + a)(t + a) \le 0.$ Монда элекке кебек үк $t = log_5 x,\ a = log_5 3.$



2.43



2.44

Квадрат өчбуын, $t = 0$ булганда, $a^2 + a = log_5^2 3 + log_5 3 > 0$ кыйммәтен ала, шуның өчен тамгалар схемасы 2.44 рәсемендә сурәтләнгәнчә була. Димәк, $-(1 + a) \le t \le -a$.

$$-(1 + log_5 3) \le log_5 x \le - log_5 3 \Leftrightarrow -log_5 15 \le log_5 x \le -log_5 3.$$

Моннан $\frac{1}{15} < x < \frac{1}{3}$.

Аналитик һәм график методлар белән бергә кулланганда интерваллар методының нәтиҗәлерәк булуын онытмаска кирәк.

III бүлек

КОМБИНАТОРИКА ЭЛЕМЕНТЛАРЫ ҺӘМ НЬЮТОН БИНОМЫ

1. КҮПЛЕКЛӘР ТЕОРИЯСЕ БИЛГЕЛӘМӘЛӘРЕ

Асылы, табигате буенча бертөрле әйберлер күплеге (җыентыгы) бирелгән булса, бу әйберләр *күплекнең элементлары* дип аталалар.

a, b, c, d элементларыннан торган A күплеген $A = \{a, b, c, d\}$ дип язалар; әгәр A күплеге x тибындагы аерым элементлардан торса һәм x бу күплекнең ирекле алынган бер элементының кыйммәте булса, $A = \{x\}$ дип кенә язалар.

Мисал. A — барлык уңай җөп саннар күплеге булып, $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$ рәвешендә бирелсен. Теләсә нинди җөп санның гомуми рәвеше $2n$ булганлыктан (биредә n — теләсә нинди натураль сан), бу саннар күплеген $A = \{2n\}$ дип язарга була.

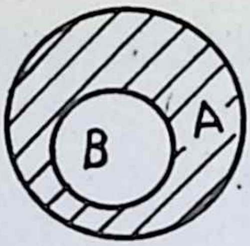
Әгәр күплек билгеле сандагы элементлардан торса, чикләнгән күплек дип, киресенчә булганда, чикләнмәгән күплек дип атала.

Әгәр күплектә бер элемент та булмаса, ул *буш күплек* дип атала һәм $\varnothing$ символы белән тамгалана.

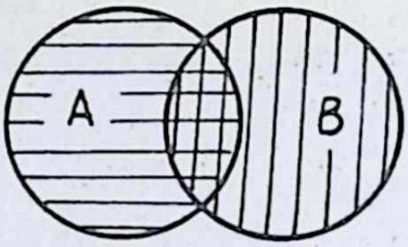
Әгәр a A күплегенең элементы булса, ул вакытта $\in$ — "керү" тамгасы кулланыла һәм $a \in A$ рәвешле языла. $a \overline{\in} B$ язылышы a элементының b күплегенә кермәвен аңлата.

Мисал. $A = \{2n\}$ булганда, $22 \in A$, $55 \overline{\in} A$.

Әйтик, A һәм B күплеге бирелгән булсын. Әгәр B күплегенең һәр элементы A күплегендә ятса, ул вакытта B A күплегенең өлеше, яки *күплекчәсе* дип атала һәм бу $\subset$ — "эченә алу" тамгасы белән языла: $B \subset A$. Мәсәлән, барлык натураль саннар күплеге N барлык реаль саннар күплеге R ның күплекчәсе, димәк, $N \subset R$.



3.1



3.2

Әгәр A һәм B күплекләрен ике әйләнә нокталары күплеге рәвешендә сурәтләсәк, "эченә алу" операциясен 3.1 рәсемендәге схема рәвешендә сурәтләргә мөмкин. Эчке, штрихланмаган әйләнә B күплегенә тиңдәш, ул зур әйләнә белән сурәтләнгән A күплегенең бер өлеше булып тора.

Күплекләр өчен түбәндәге үзлекләрне искә төшерик: $\varnothing \subset A$ һәм $A \subset A$.

Әгәр A һәм B күплекләре өчен $A \subset B$, $B \subset A$ булса, бу A күплегенең һәр элементы B күплегендә ята һәм B күплегенең һәр элементы A күплегендә ята дигән сүз, шулай итеп, ике күплек бер үк элементлардан торалар. Мондый күплекләр *тигез күплекләр* дип аталалар һәм $A = B$ символы белән сурәтләнәләр.

A һәм B күплегенең берсенә генә булса да кергән барлык элементлардан торган күплек A һәм B күплекләренең *берләшмәсе* дип атала. A һәм B күплекләренең берләшмәсе $A \cup B$ рәвешендә тамгалана. Теләсә нинди сандагы күплекләр берләшмәсе шулай ук билгеләнә.

Әгәр элемент бер үк вакытта берничә күплеккә керсә, бу элемент берләшмәгә бер генә мәртәбә керә.

3.2 рәсемендә ике күплек берләшмәсенең билгеләмәсенә аңлатма бирелә: горизонталь штрих белән сурәтләнгән A күплеге — сул түгәрәк, вертикаль штрих белән сурәтләнгән B күплеге — уң түгәрәк, ә бөтенләе белән штрихланган фигура — $A \cup B$ берләшмәсе.

Мисаллар. 1. Әгәр $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ булса, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ була.

2. Әгәр $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ булса, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ була.

A һәм B күплекләренә бер үк вакыт керә торган элементлардан хасил булган күплек бу күплекләрнең *кисешмәсе* дип атала һәм $A \cap B$ символы белән тамгалана. Берничә күплекнең кисешмәсе дә шуңа охшаш рәвештә билгеләнә.

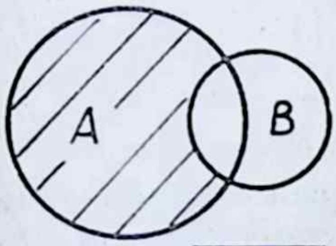
Ике күплекнең кисешмәсе ике тапкыр штрихланып, A һәм B күплегенең гомуми өлешләре белән сурәтләнгән (3.2 рәс.).

Әгәр A, B, C, D күплекләренең бер генә уртак элементы да булмаса, ул вакытта аларның кисешмәсе буш күплек була, бу очракта A, B, C, D күплекләре кисешмиләр.

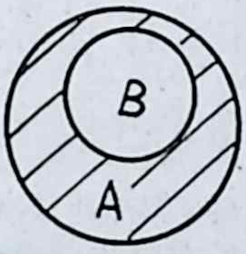
Мисаллар. 1. Әгәр $A = \{1, 2, 3,\}$, $B = \{2, 3, 4,\}$ булганда, $A \cap B = \{2, 3\}$ була.

2. Әгәр $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ булса, $A \cap B = \varnothing$ була.

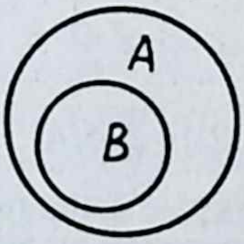
A күплегенең B күплегенә кермәгән элементларыннан торган күплек A һәм B күплекләренең *аермасы* дип атала һәм $A \setminus B$ символы белән тамгалана.



3.3



3.4



3.5

3.3 рәсемендә A түгәрәгенең штрихланган өлеше $A \setminus B$ күплеген тәшкил итә. Әгәр $B \subset A$ булса, ул вакытта $A \setminus B$ B күплегенең A күплегендәге *өстәмәсе* дип атала (3.4 рәс.). Бу очракта $A - B$ символы кулланыла.

Мисаллар. 1. Әгәр $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{0, 1, 2\}$ булса, $A \setminus B = \{3, 4\}$ була.

2. Әгәр $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3\}$ булса, $A \setminus B = \{0, 2, 4\}$ була.

A, B, C, D берләшмәсе шулай ук бу күплекләрнең *суммасы* дип атала һәм $A + B + C + D$ символы белән тамгалана, кисешмә *тапкырчыгыш* дип тә атала һәм $ABCD$ символы белән тамгалана. Күплекләрнең берләштерү һәм кисештерү гамәлләре саннарны кушу һәм тапкырлау гамәлләрендәге күп кенә үзлекләргә буйсына һәм шунлыктан югарыда бирелгән билгеләмәләргә нигез булып тора.

Шул ук вакытта кушу һәм тапкырлау гамәлләренең күплекләр һәм саннар өчен бик нык аерылып торуын да билгеләми булмый.

Мәсәлән, $A + A = A$; $AA = A$ күплекләр өчен урынлы, әгәр $B \subset A$ булса, ул вакытта $A + B = A$; $AB = B$ (3.5 рәс.). $B \subset A$ булганда гына $(A - B) + B = A$ тигезлеге хаклы.

Мисал. Әгәр $A = \{1, 2, 3,\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ булса, $A - B = \{1\}$ була. Моннан $(A - B) + B = \{1, 2, 3, 4\} \neq A$.

Барлык тәртипләндерелгән (a, b) парларының күплеге A һәм B күплекләренең *Декарт тапкырчыгышы* (яки туры тапкырчыгыш) дип атала, биредә беренче элемент $a \in A$, икенчесе $b \in B$. A һәм B күплекләренең Декарт тапкырчыгышы $A \times B$ символы белән тамгалана, ә бу күплекнең элементлары (a, b) яки ab символы белән тамгалана.

Мисал. Әгәр $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{2, 4\}$ булса, $D =$ $= A \times B \times C = \{(1, a, 2); (1, a, 4); (1, b, 2); (1, b, 4); (1, c, 2); (1, c, 4);$ $(2, a, 2); (2, a, 4); (2, b, 2); (2, b, 4); (2, c, 2); (2, c, 4)\}$.

Туры тапкырчыгыш күплегенең элементларын *тоташтырма* дип, ә тоташтырмадагы элементлар санын *тоташтырма озынлыгы* дип атыйбыз. Мәсәлән, $(1, a)$ тоташтырмасы озынлыгы икегә, $(1, a, 2)$ тоташтырмасы озынлыгы өчкә тигез.

2. КОМБИНАТОРИКАНЫҢ ТӨП КАГЫЙДӘЛӘРЕ

Математиканың бирелгән объектлардан, теге яки бу шартларга буйсынган ничә төрле комбинация төзергә мөмкин дигән сорауны тикшерүче өлкәсе *комбинаторика* дип атала.

Әгәр бирелгән объектларның төрле комбинацияләрен ниндидер бер күплекнең элементлары дип карасак, ул вакытта комбинаторика төрле чикле күплекләрнең элементлары санын хисаплау ысулларын тикшерү белән шөгыльләнә.

Комбинаторикада кушу, тапкырлау кагыйдәләре, аның ике төп кагыйдәсе буларак, бик әһәмиятле роль уйныйлар. Алар ярдәмендә комбинаториканың күп кенә мәсьәләләре чишелә, аерым әйткәндә, урнаштырма, алыштырма, оештырмалар саны турындагы классик мәсьәләләр эшләнә.

2.1. Кушу кагыйдәсе

Әгәр чикле A күплеген үзара кисешми торган берничә B_1, B_2, B_3, ... B_m күплекчәләренә таркатсак һәм $n(A)$ – A күплегенең элементлары саны, $n(B_i)$ – B_i күплегенең элементлары саны булса, ул вакытта $n(A) = n(B_1) + n(B_2) + \cdots + n(B_m)$ була.

Мисаллар. 1. Әгәр $B_1 = \{1; 3, 5\}$, $B_2 = \{0, 2, 4\}$ булса, ул вакытта $A = B_1 \cup B_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; $n(B_1 \cup B_2) = 6$. $n(B_1) + n(B_2) = 6$. Димәк, $n(B_1 \cup B_2) = n(B_1) + n(B_2)$. Монда $B_1 \cup B_2 = \varnothing$.

2. Әгәр $B_1 = \{1; 2, 3\}$, $B_2 = \{1, 3, 4\}$ булса, ул вакытта $B_1 \cup B_2 = \{1, 2, 3, 4\}$, моннан $n(B_1 \cup B_2) \neq n(B_1) + n(B_2)$, чөнки $n(B_1 \cup B_2) = 4$, ә $n(B_1) + n(B_2) = 6$. Димәк, кушу кагыйдәсе өчен $B_1 \cup B_2 = \varnothing$ шарты бик мөһим. Бу мисалда $B_1 \cap B_2 = \{1, 3\} \neq \varnothing$!

Искәрмә. Кушу кагыйдәсен, шулай ук, башка формада да әйтергә була: әгәр элементларның ниндидер бер комбинациясен m алым белән, ә икенчесен n алым белән сайларга мөмкин булса, ул вакытта барлыгы $m + n$ алым белән комбинацияләр төзергә мөмкин (бу кагыйдә теләсә нинди сандагы төрле комбинацияләр өчен дә урынлы).

Мисал. 0, 1, 2, 3, 4, 5 цифрларыннан бер-берсенә тигез булмаган һәм һәрберсендә 1 цифры нәкъ ике тапкыр очрый торган ничә өчурынлы сан төзергә мөмкин?

Чишү. Ике берлекне эченә алган өчурынлы саннар түбәндәге рәвешчә язылa: $11a$, $1b1$, $c11$, ягъни без өч төрле комбинация табабыз, $11a$ рәвешендәге комбинацияне 5 алым белән сайларга мөмкин (чыннан да a урынына бирелгән цифрлардан 0, 2, 3, 4, 5 цифрларын куярга була), $1b1$ рәвешле комбинацияне шулай ук 5 алым белән сайлап була. Ниһаять $c11$ рәвешле комбинацияне 4 алым белән сайларга була (чөнки 0 ярамый). Кушу кагыйдәсе буенча $4 + 5 + 5 = 14$ төрле өчурынлы сан төзергә мөмкин.

Җавап. 14.

2.2. Алу кагыйдәсе

Әгәр B күплеге A ның күплекчәсе булса, ягъни $B \subset A$ һәм $n(A - B)$ $A - B$ өстәмәсенең элементлар саны булса, ул вакытта $n(A - B) = n(A) - n(B)$. Чыннан да, $B \subset A$ булса, $(A - B) + B = A$ була, һәм B күплеге белән аның $A - B$ өстәмәсе кисешмиләр. Кушу кагыйдәсе буенча $n(A) = n(A - B) + n(B)$, моннан $n(A - B) = n(A) - n(B)$.

2.3. Тапкырлау кагыйдәсе

Әгәр A күплегенең элементлар саны $n(A)$, B күплегенең — $n(B)$ булса, бу күплекләрнең Декарт тапкырчыгышының $(A \times B)$ элементлары саны $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$ була.

Чыннан да, әгәр $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$; $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ булса, ул вакытта $D = A \times B$ күплегенең барлык элементларын түбәндәге таблица рәвешендә күрсәтергә мөмкин:

$$\begin{array}{l}
(a_1, b_1), \ (a_1, b_2), \ (a_1, b_3), \ldots, (a_1, b_m) \\
(a_2, b_1), \ (a_2, b_2), \ (a_2, b_3), \ldots, (a_2, b_m) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(a_n, b_1), \ (a_n, b_2), \ (a_n, b_3), \ldots, (a_n, b_m)
\end{array}$$

Моннан күренгәнчә, аларның саны $n \cdot m$ була.

Тапкырлау кагыйдәсен икенче төрле әйтергә дә мөмкин: ике элементның комбинациясен (a, b) рәвешендә төзегәндә беренче элементны n алым белән, ә икенчесен m алым белән сайлап булса, (a, b) рәвешле бер-берсенә тигез булмаган комбинацияләрне $n \cdot m$ алым белән сайларга мөмкин.

Мисаллар. 1. Хоккей буенча ил беренчелеге ярышында 15 команда катнаша. Алтын һәм көмеш медальләр ничә төрле алым белән бүленергә мөмкин?

Чишү. Мәсьәләнең шарты буенча (A, K) рәвешле төрле комбинацияләрнең санын табу кирәк. Биредә (A, K)=("Алтынлы команда", "Көмеш медальле команда"). Алтын медальне 15 команданың берсе алырга мөмкин, ягъни (A, K) парында 15 алым белән беренче элементны сайларга була.

Алтын медальнең иясе ачыкланганнан соң, ягъни беренче элемент сайланганнан соң, көмеш медальне 14 команданың берсе алырга мөмкин. Шулай итеп, (A, K) парының икенче элементын 14 алым белән сайлап була. Тапкырлау кагыйдәсе буенча медальләр таратуның гомуми саннар алымы $15 \times 14 = 210$ га тигез.

Җавап. 210.

2. 4 төрле маркалы һәм 5 төрле маркасыз конверт бар. Маркалы конвертларны ничә төрле алым белән сайлап була?

Чишү. $A = \{a\}$ конвертлар күплеге 5, ә $B = \{b\}$ маркалар күплеге дүрт элементтан тора. Бу ике күплекнең элементларыннан мөмкин булган (конверт, марка)$=(a, b)$ рәвешле барлык парлар төзелгән. Бу комбинацияләр $A \times B$ күплегенең элементлары булып торалар. Тапкырлау кагыйдәсе буенча мондый комбинацияләр саны 5×4.

Җавап. 20.

3. Икесе ак, дүртесе кара шар булган урнадан өч шар сайлап алына. Берсе ак, икесе кара булган өч шарны ничә төрле комбинация белән сайлап алып була?

Чишү. Фараз ак һәм кара шарларга номерлар сугылган ди, ул вакытта $A = (1, 2)$, ак шарлар күплеге, $K = \{1, 2, 3, 4\}$ кара шарлар күплеге. Мәсьәләнең шарты буенча (A, KK) рәвешле комбинацияләрнең санын табарга кирәк, биредә беренче элемент ак шар, икенче элемент ике кара шар. (A, KK) рәвешле элементлар $D = A \times C$ рәвешле элементлар күплеген хасил итә. Монда C мөмкин булган барлык кара шарлар пары, алар K күплегенең элементларыннан төзелгән. Монда, кара шарлар нинди тәртиптә алынса да, бер үк нәтиҗә килеп чыга. Дүрт шардан андый комбинацияләрне 6 алым белән төзергә мөмкин: (1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 3); (2, 4); (3, 4). Нәтиҗәдә C һәм A 6 һәм 2 элементлы күплекләр икәне мәгълүм була. Тапкырлау кагыйдәсе буенча $D = A \times C$ күплегенең элементлары саны 2×6 тигез.

Җавап. 12.

Тапкырлау кагыйдәсен теләсә нинди сандагы тапкырлаучылар өчен дә гомумиләштереп була. Тәртипләндерелгән k элементының төрле комбинацияләре, ягъни $A = A \times A_2 \times \cdots \times A_k$ күплегенең элементлар саны $n(A) = n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$, биредә $n_i = n(A_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Мисаллар. 1. 3 алгебра, 7 геометрия, 7 тригонометрия дәреслеге бар. Һәр дәреслекне берәр данә сайлап алырга кирәк. Моны ничә юл белән эшләргә мөмкин?

Чишү. Әйтик, A — алгебра, B — геометрия, C — тригонометрия дәреслекләре күплеге (биредә $n(A) = 3$, $n(B) = 7$, $n(C) = 7$), $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$. (a, b, c) тәртипләндерелгән өч төрле дәреслек комбинациясе. Мөмкин булган барлык элементлар саны $D = A \times B \times C$ күплегенең элементлар санына тигез. Тапкырлау кагыйдәсе буенча $n(D) = 3 \times 7 \times 7$.

Җавап. 147

2. Букинистик китаплар кибетендә И. С. Тургеневның 6 данә "Рудин", 3 данә "Дворянское гнездо", 4 данә "Отцы и дети" романнары бар. Алардан кала "Рудин" һәм "Дворянское гнездо" романнары булган 5 том, "Дворянское гнездо" һәм "Отцы и дети" романнары булган 7 том бар. Бу романнарның һәрберсен берәр данә итеп ничә алым сайлап була?

Чишү. Әйтик, $Р$ — "Рудин", $Д$ — "Дворянское гнездо", $О$ — "Отцы и дети" романнары күплеге, биредә $n(Р) = 6$, $n(Д) = 3$, $n(О) = 4$. $РД$ — "Рудин" һәм "Дворянское гнездо" романлы томнар күплеге, $ДО$ — "Дворянское гнездо" һәм "Отцы и дети" романлы томнар күплеге. Монда $n(Р\,Д) = 5$, $n(Д\,О) = 7$. $A = Р \times Д \times О$, $B = РД \times О$, $C = Д\,О \times Р$ элементлары һәр романны нәкъ бер тапкыр эченә алган күплекләр, өстәвенә $A \cap B \cap C \neq \varnothing$.

Мөмкин булган барлык сайлау комбинацияләренең саны $W = A \cup B \cup C$ күплегенең элементлар санына тигез. Тапкырлау һәм кушу кагыйдәләрен кулланып, табабыз: $n(W) = n(A) + n(B) + n(C) = n(Р)n(Д) \cdot n(О) + n(РД) \cdot n(О) + n(Д\,О) \cdot n(Р) = 6 \cdot 3 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 6 = 72 + 20 + 42 = 134$.

Җавап. 134.

3. 6, 8 һәм 10 кырлы өч бөтерчек бар. Алар ничә төрле юл белән төшәргә мөмкин?

Шул ук мәсьәләне, ким дигәндә, ике бөтерчекнең 1 цифры белән тамгаланган кырга төшкән очрагы өчен чишәргә.

Чишү. а) Әйтик, A, B, C — бөтерчекләрнең кырларына тиңдәш булган күплекләр. Әгәр $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ булса, ул вакытта мәсьәләнең беренче шарты буенча (a, b, c) рәвешле комбинацияләрнең санын табу кирәк. Бу сан $D = A \times B \times C$ күплегенең элементлар санына тигез, ягъни $6 \times 8 \times 10 = 480$.

б) Икенче мәсьәләне чишү өчен $D = \{(a, b, c)\}$ күплегенең элементлары ике яки өч берлекне эченә алган күплекчәсен табабыз. Өч берлектән бер элемент (1, 1, 1) тора. Икешәр берлекле элементлар күплекчәсе $D_1 = \{(a, 1, 1)\}$, $D_2 = \{(1, b, 1)\}$, $D_3 = \{(1, 1, c)\}$ рәвешле була. $n(D_1) = 5$, $n(D_2) = 7$, $n(D_3) = 9$, чөнки бу күплекчәләрнең элементларындагы a, b, c берле цифрына тигез була алмыйлар. Кушу кагыйдәсе буенча икенче мәсьәләнең шартын канәгатьләндерүче элементлар саны $1 + 5 + 6 + 9 = 21$гә тигез.

Җавап. 480; 21.

4. 0, 1, 2, 3, 4, 5 цифрлары ярдәмендә бишкә бүленә торган ничә өчурынлы сан төзергә мөмкин?

Чишү. (a, b, c) рәвешле өчурынлы санда a — йөзләр саны, b — унарлыклар саны, c — берәмлекләр саны. Мәсьәләнең шарты буенча (a, b, c) рәвешле төрле комбинацияләрнең санын исәпләп чыгарырга кирәк. Әйтик, $A = \{a\}$; $B = \{b\}$; $C = \{c\}$. Сан нульдән башлана алмый, шуның өчен $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $n(A) = 5$; $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $n(B) = 6$, чөнки унарлык бирелгән цифрларның теләсә кайсына тигез була ала. Ниһаять, $C = \{0, 5\}$, $n(C) = 2$, чөнки безнең өчурынлы сан бишкә бүленергә тиеш. Билгеле булганча, (a, b, c) рәвешле комбинацияләр саны $D = A \times B \times C$ күплегенең элементлары санына тигез. Тапкырлау кагыйдәсе буенча $n(D) = n(A) \times n(B) \times n(C) = 5 \times 6 \times 2 = 60$.

Җавап. 60.

Күнегүләр

1. A шәһәреннән B шәһәренә 7 юл, B шәһәреннән C шәһәренә 4 юл бара. $A \to B \to C$ маршрутын ничә төрле юл белән сәяхәт итеп була?

2. Алты кырлы уен шакмагын ыргыталар һәм сигез кырлы бөтергечне җибәрәләр. Алар ничә төрле алым белән төшәргә мөмкин?

3. Бер кешенең — 7, икенчесенең 9 китабы бар. Ничә алым белән алар бер-берсенең китабын алыштыра алалар?

4. Шахмат тактасында бер горизонтальдә һәм вертикальдә ятмый торган ак һәм кара шакмакларны ничә алым белән сайларга була?

5. 1, 2, 3, 4, 5 цифрларыннан ничә өчурынлы сан төзергә була?

6. 6 кеше касса чиратында ничә төрле урнаша ала?

7. Класста 10 предмет өйрәнәләр. Дүшәмбе — 6 дәрес, һәм төрле дәресләр. Дүшәмбе көн өчен ничә төрле расписание төзергә була?

8. Автомобильләр номеры бер, ике яки өч хәрефтән, дүрт цифрдан тора. Әгәр рус алфавитының 32 хәрефе файдаланылса, ничә төрле номер була?

9. 1, 2, 3, 4, 5 цифрларыннан дүрткә бүленә торган ничә дүртурынлы сан төзергә була?

Җаваплар

1. 28. 2. 48. 3. 63. 4. 768. 5. 125. 6. 720. 7. $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 151200$. 8. $(32 + 32^2 + 32^3) \times 10^4 = 33820 \times 10^4$. 9. $5^2 \times 5 = 125$.

3. УРНАШТЫРМАЛАР

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ — n элементлы күплек. Бу күплекнең элементларыннан $(b_1, b_2, \dots, b_k)$ рәвешле комбинацияләр, ягъни k озынлыгындагы сүзләр төзелә, биредә $k \le n$. Беренче хәреф итеп, n элементлы A күплегенең теләсә кайсы элементын алырга була, икенче төрле әйткәндә, сүзнең беренче элементын n алым белән сайларга мөмкин.

Әгәр беренче элемент сайланса, сүзнең икенче элементын сайларга А күплегенең $n-1$ элементы кала, ягъни сүзнең икенче элементы $n-1$ алым белән сайлана ала, өченче элемент $n-2$ алым белән һәм, ниһаять, сүзнең k нчы элементы калган $n-(k-1)$ алым белән сайлана. Тапкырлау кагыйдәсе буенча $(b_1, b_2, \dots, b_k)$ рәвешле комбинацияне бу очракта $n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$ алым белән сайларга була.

Алынган кушылмалар (сүзләр) бер-берсеннән я урыннары, я элементлары белән аерылып торалар. Монда ике бертөрле элемент кергән сүзләр юк.

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ күплеге элементларыннан хасил булган k озынлыгындагы һәртөрле тоташтырмалар бер-берсеннән я элементлары белән, я шул элементларның тәртипләре белән аерылсалар, ул вакытта алар *n элементтан k элементлы кабатланмый торган урнаштырмалар* дип аталалар, бу урнаштырмалар саны $n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))$ тигез.

Мисал. $A = \{a, b, c\}$ күплеге бирелгән. Бу күплекнең 3 элементыннан 2 элементлы урнаштырмалар төзик.

Чишү. Эзләнә торган комбинацияләр барысы алты була: (a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b). Бу тоташтырмалар бер-берсеннән элементлары белән ((a, c) һәм (b, c)), я булмаса элементларның тәртибе белән ((a, b) һәм (b, a)) аерылалар. Монда бер элемент ике тапкыр кабатланмый, ягъни (a, a), (b, b), (c, c) тоташтырмалары юк,

n элементның k озынлыгындагы урнаштырмалар саны A_n^k символы белән тамгалана. Шулай итеп, формула килеп чыга:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1)).$$

Мисаллар. 1. Урнада 5 төрле шар ята. Очраклы рәвештә бер-бер артлы, алган шарны кире салмыйча, өч шар алалар. Бу тәҗрибәнең ничә төрле нәтиҗәсе бар?

Чишү. 1, 2, 3, 4, 5 цифрлары белән шарларны номерлыйбыз. Очраклы рәвештә беренче шарны алабыз, аның номерын язабыз, шарны урнага кире салмыйбыз. Аннан соң шулай ук икенче шарны алабыз, аның номерын язабыз. Ниһаять, өченче шарны алабыз. Бу тәҗрибәнең нәтиҗәсе өчурынлы сан рәвешен ала: (a, b, c), биредә a — беренче алган шарның номеры, b — икенчесенеке, c — өченченеке. Мәсьәләнең шарты буенча (a, b, c) рәвешле ничә төрле комбинациясе булуын исәпләп чыгарырга кирәк. Тоташтырманың беренче элементын биш төрле санап була: 1, 2, 3, 4, 5, икенче элементын дүрт, ниһаять, өченче элементын өч төрле алым белән сайлап була. Тапкырлау кагыйдәсе буенча (a, b, c) рәвешле комбинацияләр саны $5 \times 4 \times 3 = 60$ ка тигез. Бу мисал комбинациянең исемен аңлата: кабатланмый торган урнаштыру, ягъни кире кайтармый сайлап алу.

2. Җирле комитетка 8 кеше сайланган. Алардан председательне, аның урынбасарын, секретарьны һәм культоргны сайларга кирәк. Моны ничә юл белән эшләргә була?

Чишү. Комитетка сайланган 8 кеше 8 элементлы күплек була. Алардан дүрт кеше сайларга кирәк, сайлау нәтиҗәсен дүрт элементтан торган $(п, у, с, к)$ рәвешле тоташтырма дип атарга була. Председатель 8 юл белән сайланырга мөмкин, аның урынбасары 7 юл белән һ. б. ш. Без 8 элементтан 4 элементлы урнаштырма табабыз.

Андый урнаштырмалар саны $A_8^4 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$.

Җавап. 1680.

3. Рус, инглиз, француз, немец, итальян телләренең һәрберсеннән теләсә нинди икенчесенә тәрҗемә итү мөмкин булсын өчен ничә төрле сүзлек чыгарырга кирәк?

Чишү. Әйтик, $A = \{Р, А, Ф, Н, И\}$ — телләр күплеге. Сүзлекне озынлыгы 2 булган тоташтырма рәвешендә сурәтләп була. Мәсәлән, русча-немецча сүзлек $(Р, Н)$ рәвешендә, немецча-русча $(Н, Р)$. Озынлыгы ике булган төрле тоташтырмалар бер-берсеннән я элементлары, я аларның тәртипләре белән аерылып торалар. Бу тоташтырмаларда элементлар кабатланмый, мәсәлән, $(А, А)$ тоташтырмасы монда юк. Нәтиҗәдә биш элементтан ике элементлы кабатланмый торган урнаштырмалар табабыз.

Мондый урнаштырмалар (сүзлекләр) саны $A_5^2 = 5 \times 4 = 20$ тигез.

Җавап. 20.

Күнегүләр

1. Дүрт студентны 25 урынлы бүлмәдә ничә алым белән утыртырга мөмкин?

2. 8 көн эчендә студент 4 имтихан бирергә тиеш. Бер көндә ул бер имтихан бирә. Моны ничә юл белән эшләргә була?

Әгәр соңгы имтихан сигезенче көнне бирелсә, ничә юл белән эшләргә була?

3. 5 төсле материалдан өч буйлы флагны ничә төрле итеп тегеп була? Бер буе кызыл булсын дигән шарт куелса, флагны ничә төрле итеп тегеп була?

4. Һәрберсе аерым карточкага язылган 10 вариантлы контроль эшне 8 студентка тараталар, монда һәр студент бер вариант ала. Вариантларны студентларга ничә юл белән таратырга мөмкин?

5. 10 спортчы ярышта катнаша. Өч судья ирекле рәвештә җиңүчене билгелиләр. Ничә очракта аларның төрле өч кандидатны җиңүче итеп атаулары мөмкин?

6. 100 + 200 + 400 + 800 эстафетасында катнашу өчен 30 кешедән дүрт кешелек торган команда төзергә кирәк. Ничә алым белән моны эшләргә була?

7. Тимер юлда 50 станция булса, китү һәм килү станцияләрен күрсәтеп ничә төрле билет эшләргә кирәк?

8. Бишесе дә төрле цифрлардан төзелгән ничә телефон номеры була ала?

Җаваплар

1. 303600. 2. 1680; 840. 3. 60; 36.
4. 1814400. 5. 720. 6. 657720.
7. 2450. 8. 30240.

4. АЛЫШТЫРМАЛАР

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ n төрле элементтан торган күплек бирелсен. Бу элементлардан кабатланмый торган n элементлы урнаштырмалар, ягъни озынлыгы n булган һәртөрле тоташтырмалар төзибез. Урнаштырмаларда A күплегенең барлык элементлары да булганлыктан, бу тоташтырмалар бер-берсеннән фәкать элементларының тәртипләре белән генә аерылып торалар.

n элементтан n элементлы кабатланмый торган урнаштырманы элементлы *алыштырма* дип атыйлар.

Мисал. $A = \{a, b, c\}$ күплеге бирелгән. Бу элементлардан барлык алыштырмаларны төзегез.

Чишү. Өч элементтан өч элементлы кабатланмый торган урнаштырма төзибез. Озынлыгы 3 булган беренче тоташтырма: $(a,\ b,\ c)$.

Калган тоташтырмалар да шушы ук элементлардан аларның тәртипләрен үзгәртеп төзеләләр: $(b,\ c,\ a)$; $(c,\ a,\ b)$; $(b,\ a,\ c)$; $(a,\ c,\ b)$; $(c,\ b,\ a)$. Барлыгы алты тоташтырма табабыз.

n элементлы алмаштырмалар саны P_n символы белән тамгалана һәм билгеләмә буенча

$$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(n-1)) = n(n-1)\ldots 2\cdot 1 = n!$$

Шулай итеп, формула табылды: $P_n = n!$

Мисаллар. 1. Китап киштәсенә 5 төрле китапны ничә төрле алым белән урнаштырырга мөмкин?

Чишү. 5 төрле китаптан торган күплек бирелгән. Бу күплек элементларыннан аларның барысы да керә торган тоташтырмалар төзибез. Шулай итеп, без биш элементлы алыштырмалар алырбыз. Мондый алыштырмалар саны $P_5 = 5! = 120$ гә тигез.

Җавап. 120.

2. Бер-берсен сугып алырлык итмичә 8 ладьяны шахмат тактасына ничә юл белән урнаштырырга була?

Чишү. Ладьялар бер-берсен сугып алырлык булмаганлыктан, һәр ладья үзенең вертикаль һәм горизонталь юлын биләргә тиеш. Әйтик, a_1 — беренче вертикальнең шакмак номеры, a_2 — икенче вертикальнең шакмак номеры һ. б. ш. Ул вакытта $(a_1,\ a_2, \ldots,\ a_8)$ рәвешле тоташтырма, шахмат тактасындагы ладьяларның төрле вертикальдә һәм горизонтальдә урнашуын аныклый. $(a_1,\ a_2, \ldots,\ a_8)$ рәвешле тоташтырма 1, 2, 3, ..., 8 саннарының алыштырмасын тәшкил итә.

Димәк, 8 элементлы алыштырмалар санын исәплибез:

$$P_8 = 8! = 40320.$$

Җавап. 40320.

3. Дүрт кеше түгәрәк өстәл артына утыралар. Аларның үзара торышына карата берничә мәсьәлә чишик:

а) алар ничә төрле итеп утырырга мөмкин?

б) һәр кешенең бер үк күршеләр булган ике утыру төрен бер дип санаганда, алар ничә төрле итеп утырырга мөмкин?

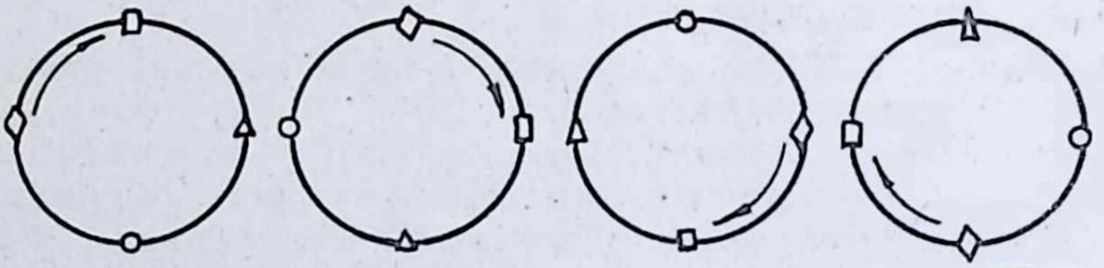
в) ничә очракта бу дүрт кешенең икесе янәшә утыралар?

Чишү. а) монда 4 элементның алыштырмалары була, ягъни барлык комбинацияләр $4! = 24$ кә тигез;

б) әйләнмә (цикл белән) алыштырган вакытта түгәрәк өстәл янында утыручыларның бер-берсенә карата урнашуы үзгәрми. Бу цикллы алыштырмалар (3.6 рәс.) мәсьәләнең шарты буенча бертөрле булып саналалар, чөнки алар кешеләрнең бер-берсенә карата урнашуларын үзгәртмиләр.

Үзара утыруның рәвешен үзгәртик, ягъни әйләнмә булмаган алыштырма ясыйк. Бу яңа алыштырма мәсьәлә шарты буенча, шулай ук, дүрт бертөрле алыштырма бирә. Шулай итеп, бу мәсьәләдә әйләнмә булмаган алыштырмалар санын исәпләргә кирәк (3.7 рәс.). 3.7 рәсемендә һәртөрле алыштырмаларның схемасы сурәтләнгән, аларның саны 4!. Әйләнмә булмаган алыштырмалар санын x дип билгелик. Күргәнебезчә,

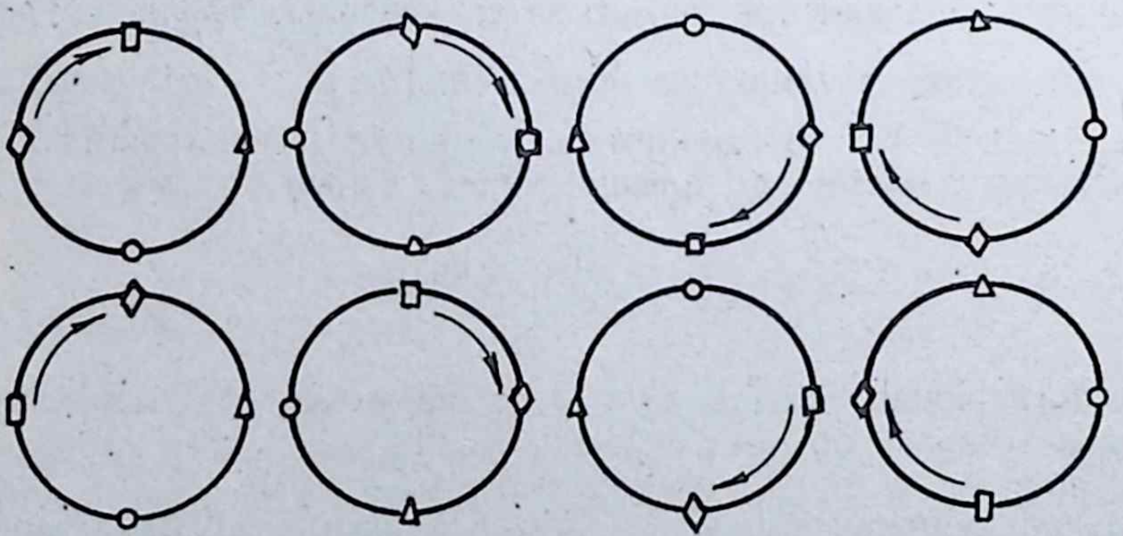
$4! = x \cdot 4$. Моннан x ! $4!/4 = 3! = 6$.



3.6

в) Әгәр ике кешене берләштерсәк, 3 элементтан торган алыштырма хасил була. Андый алыштырмалар саны 3! га тигез. Ике янәшә кешене берләштерсәк, кушу кагыйдәсе буенча 4 кешедән торган алыштырмалар саны 2.3! була.

Җавап. а) 24; б) 6; в) 12.



3.7

4. Җыелышта биш кеше: *А, В, С, Д, Е* чыгыш ясарга тиеш. Әгәр *А* чыгыш ясамыйча *В* чыгыш ясамаса, ораторлар исемлегендә ничә төрле чират була ала?

Чишү. *А, В, С, D, Е* өчен $5! = 120$ төрле исемлек төзеп була. Һәр исемлектә я *А*, я *В* алда тора. Ләкин *А* һәм *В* тигезкөчле ораторлар. Шуның өчен, 120 исемлек ике тигез өлешкә бүленә: бе-

ренчесендә A B га караганда алдан чыгыш ясый, ә икенчесендә — киресенчә. Нәтиҗәдә, A ораторы B дан алда чыгыш ясый торган исемлекләрнең саны: $\frac{1}{2} \cdot 120 = 60$.

Җавап. 60.

Күнегүләр

1. 8 кеше касса чиратында ничә төрле басарга мөмкин?

2. Җыелышта 5 кеше: A, B, C, D, E чыгыш ясарга тиеш. Әгәр A нәкъ B алдыннан чыгыш ясарга тиеш булса, ничә төрле исемлек төзеп була?

3. Ике ир, я ике хатын янәшә утырмаганда, 5 ирне һәм 5 хатын-кызны түгәрәк өстәл артына ничә төрле утыртып була?

4. Биш төрле энҗе бөртегеннән ничә төрле муенса тезеп була (барлык биш бөртекне дә кулланырга)?

5. Тимер юл вагонының купесында бишәр урынлы, бер-берсенә каршы урнашкан ике диван бар. 10 пассажирның 4 се алга, өчесе артка карап утырырга телиләр, ә калганнары өчен ничек утыру әһәмиятле түгел. Бу пассажирларны ничә алым белән утыртырга була?

6. Киштәдә 15 төрле китап бар, аларның 6 сының тышлыгы кара, калганнарының яшел төстә. Әгәр кара тышлы китаплар алда булса, ничә алым белән бу китапларны урнаштырып була? Ничә алыштырмада барлык кара тышлы китаплар янәшә тора?

7. Урнада 2 ак, 4 кара шар бар. Бер-бер артлы барлык шарларны да чыгаралар. Ничә очракта соңгы шар кара була?

Җаваплар

1. $8! = 40320$. 2. $4! = 24$. 3. $2(5!)^2 = 28800$.

4. $\frac{5!}{5 \cdot 2} = 12$. 5. $3(5!)^2 = 43200$.

6. $6!\,9!$; $6! \cdot 10!$. 7. $4!\,5! = 480$.

5. ОЕШТЫРМАЛАР

Башта мисал карыйк. Өч элементлы $A = \{a, b, c,\}$ күплеге бирелгән ди. Бу күплекнең элементларыннан икешәр элемент алып, кабатланмый торган һәртөрле алыштырмалар төзик: (a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b). Аларның саны $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$ га тигез. Бу алыштырмалар күплеген, бер үк элементлардан торган алыштырмаларны берләштереп, группаларга бүләбез.

1. $(a, b), (b, a)$. 2. $(a, c), (c, a)$.
3. $(b, c), (c, b)$.

Өч группа табабыз, аларның һәркайсы 2 элементтан торган алыштырмалар күплеге, ягъни $P_2 = 2! = 2$ тоташтырмадан торалар. Әгәр группалар санын C_3^2 символы белән тамгаласак, ул вакытта $C_3^2 \cdot P_2 = A_3^2$. Һәр группадагы алыштырмалар $B_1 = \{a, b\}$, $B_2 = \{a, c\}$, $B_3 = \{b, c\}$ күплекләренең элементларыннан төзелгән. B_1, B_2, B_3 күплекләре икешәр элементтан тора һәм алар $A = \{a, b, c\}$ күплегенең күплекчәсен хасил итәләр. Алар өчтән икешәр элементлы *оештырмалар* дип аталалар.

Билгеләмә. n элементлы күплекнең һәртөрле k элементлы $(k \leq n)$ күплекчәсе n элементның k элементлы *оештырмасы* дип атала.

Бу күплекчәләрдә элементларның тәртибе мөһим түгел, шуның өчен оештырмалар бер-берсеннән элементлары белән аерылып торалар, ә n элементтан k элементлы оештырмалар саны C_n^k символы белән тамгалана.

n элементлы күплекнең k элементлы күплекчәләренең санын исәплик. Әйтик, $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — n элементлы күплек. Бу n элементтан k элементлы урнаштырмалар саны A_n^k га тигез. Бу урнаштырмалар күплеген элементлары бер үк булган группаларга бүләбез. Һәр группа — k элементлы алмаштырмалар дигән сүз, алар һәркайсы $k!$ тоташтырмадан тора. Группалар саны A күплегенең k элементлы күплекчәләре санына, ягъни C_n^k га тигез.

Шулай итеп, урнаштырмалар саны (озынлыгы k булган тоташтырмалар) $k!\ C_n^k$ тапкырчыгышына тигез. Нәтиҗәдә $A_n^k = k!\ C_n^k$ аңлатмасы килеп чыга, моннан

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

чөнки $P_k = k!$, $A_n^k = n(n-1)\ldots(n-(n-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Мисаллар. 1. Шахмат буенча ил беренчелегенең ярымфиналында 20 кеше катнаша, финалга беренче өч урынны алган шахматист чыга. Ярымфинал ничә төрле тәмамланырга мөмкин?

Чишү. Мәсьәләнең шарты буенча финалга өчәү чыга, һәм монда аларның нинди тәртиптә чыгулары мөһим түгел. Нәтиҗәдә 20 катнашучыдан 3 ле комбинацияләр санын табарга кирәк. Бу комбинацияләр 20 элементның өчәрле оештырмалары санына тигез. Аларның саны

$$C_{20}^{3} = \frac{20!}{3! \cdot 17!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 3 \cdot 20 \cdot 19 = 1140.$$

Җавап. 1140.

2. Конференциядә катнашучы 52 кешедән 5 кешедән торган делегация сайларга кирәк. Моны ничә алым белән эшләп була?

Чишү. Делегацияләр бер-берсеннән үзенең составы белән генә аерыла, шуның өчен 52 нең 5 ле оештырмалар санын исәпләргә кирәк:

$$C_{52}^{5} = \frac{52!}{5!\,47!} = 2598960.$$

Җавап. 2598960.

3. Студентлар кичәсенә 12 кыз һәм 15 егет килгән. Бию өчен алардан ничә алым белән дүрт пар сайлап була?

Чишү. Башта 4 кыз сайлыйбыз, моны C_{12}^{4} алым белән эшләп була. Аннан соң A_{15}^{4} алым белән егетләрне сайлыйбыз. Монда нәтиҗә парлау тәртибендә бәйле. Тапкырлау кагыйдәсе буенча парларны $C_{12}^{4} \cdot A_{15}^{4}$ алым белән сайлап була.

Искәрмә. Башта дүрт егетне C_{15}^{4} төрле итеп сайларга мөмкин, аннан кызларны A_{12}^{4} алым белән сайлыйбыз. Монда нәтиҗә үзгәрмәс, $C_{12}^{4} \cdot A_{15}^{4} = C_{15}^{4} \cdot A_{12}^{4}$.

Җавап. $C_{12}^{4} \cdot A_{15}^{4}$.

4. Бердән утызга кадәр саннар күплегеннән суммасы җөп булган өч санны ничә юл белән сайлап алып була?

Чишү. Әгәр барлык кушылучылар да җөп булса, яки икесе так, берсе җөп булса, сумма җөп була. Безнең күплектә 15 җөп, 15 так сан бар.

Беренче очракны карыйк. Барлык өч кушылучылар да җөп сан. Кушылучыларның тәртибе мөһим булмаганлыктан, 15 саннан өч санны C_{15}^{3} алым белән сайлап була.

Бер кушылучы җөп, икесе так очракны карыйк. Бер җөп санны 15 төрле сайлап булса, ә ике так санны C_{15}^{2} алым белән сайлап була,

моннан тапкырлау кагыйдәсе буенча $15 \cdot C_{15}^{2}$ алым була. Шулай итеп, кушу кагыйдәсе буенча барлыгы $C_{15}^{3} + 15 \cdot C_{15}^{2}$ алым белән өч санны сайларга мөмкин.

Җавап. $C_{15}^{3} + 15\,C_{15}^{2}$.

Күнегүләр

1. 5 төрле буяудан 3 төрле буяуны ничә алым белән сайларга мөмкин?

2. 25 укучыдан 3 кешедән торган делегацияне ничә юл белән сайлап була?

3. Һәр цифр үзеннән алда килгән цифрдан зур булган ничә дүртурынлы сан бар?

4. 15 кешедән өч кешелек 5 группаны ничә юл белән сайларга була?

5. Югары лигада футбол буенча ил беренчелегендә 17 команда катнаша. Беренче, икенче, өченче урынны алган командалар алтын, көмеш һәм бронза медальләр белән бүләкләнәләр, ә соңгы дүрт урынны алган команда югары лигадан чыгарыла.

Барысы ничә төрле нәтиҗә булуы мөмкин?

6. Биш кыз, дүрт егет городки уйныйлар. Аларны ничә юл белән дүрт кешелек, кимендә бер егет катнашкан ике командага бүләргә мөмкин?

7. Бер кешенең 7, ә икенчесенең 9 китабы бар. Берсенең ике китабын икенчесенең ике китабына ничә юл белән алыштырып була?

8. 7 ир, 4 хатын-кыз булган оешмадан, араларында ике хатын-кыздан да ким булмаган алты кеше сайлап алырга кирәк. Ничә юл белән моны эшләп була?

9. 17 кешенең икесе бергә сайлана алмаса, алардан 12 кешене ничә юл белән сайларга була?

10. Хорда 10 кеше катнаша. Өч концерт өчен төрле алты җырчы торган бригадаларны ничә юл белән сайлап була?

Җаваплар

1. $C_{5}^{3} = 10$.
2. $C_{25}^{3} = 2300$.
3. 126.
4. $C_{15}^{3}C_{12}^{3}C_{9}^{3}C_{6}^{3}C_{3}^{3} = \frac{15!}{(3!)^{5}}$.
5. $A_{17}^{3} \cdot C_{14}^{4} = 4084080$.
6. $3 \cdot C_{5}^{3} = 30$.
7. $C_{7}^{2}C_{9}^{2} = 756$.
8. $C_{4}^{2}C_{7}^{4} + C_{4}^{3}C_{7}^{3} = 371$.
9. $C_{17}^{12} - C_{15}^{10}$.
10. 210.209. 208.

6. МАТЕМАТИК ИНДУКЦИЯ ПРИНЦИБЫ

"Индукция" сүзе юнәлеш, хәл белү мәгънәсен күрсәтә. Аерым нәтиҗәләрдән гомуми нәтиҗә ясалса, бу индуктив нәтиҗә дип атала. Математик индукция — математикада кулланыла торган исбатлау методларының иң әһәмиятлеләреннән берсе.

Математик индукция методының нигезендә түбәндәге принцип ята: әгәр 1) ниндидер натураль санга бәйле булган $A(n)$ раславы $n = 1$ өчен дөрес булса һәм 2) ниндидер ирекле $n = k$ $(k \geq 1)$ кыйммәте *өчен әлеге раслауның дөреслегеннән аның $n = k + 1$ өчен дә дөрес икәнлеге килеп чыкса, ул раслау теләсә нинди натураль n саны өчен дә дөрес була.* Математик индукция методы дип шушы принципка нигезләнгән исбатлау методы атала:

1) $A(n_0)$ дөреслеге тикшерелә. 2) $A(k)$ ны дөрес дип алып, $A(k + 1)$ нең дөреслеге исбатлана. Бу исбатлауның һәр этабы зур әһәмияткә ия. Аның берсе генә төшереп калдырылса да, ялгыш нәтиҗәләргә килергә мөмкин.

Мисал. Беренче n так санның суммасын исәпләргә.

Чишү. Эзли торган сумманы S_n тамгасы белән билгелик:

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1).$$

Исәплибез: $S_1 = 1$, $S_2 = 4$, $S_3 = 9$, $S_4 = 16$, $S_5 = 25$ яки $S_1 = 1^2$, $S_2 = 2^2$, $S_3 = 3^2$, $S_4 = 4^2$, $S_5 = 5^2$.

Бу исәпләү нәтиҗәсендә мондый гипотеза ясыйбыз: теләсә нинди n натураль саны өчен $S_n = n^2$ формуласы дөрес. Хәзер бу формуланы математик индукция методы белән исбатлыйк.

1) $n = n_0 = 1$ булганда бу формула дөрес.

2) $n = k(k \geq 1)$ булганда гипотеза дөрес дип алыйк, ягъни $S_k = k^2$, хәзер гипотезаны $n = k + 1$ өчен исбатлыйк:

$$S_{k+1} = (k + 1)^2.$$

Исбатлау. $S_{k+1} = S_k + (2k + 1)$ яки $S_k = k^2$ булгач, $S_{k+1} = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$ икәнен табабыз. Шуны исбатларга кирәк иде дә.

Аерым очракта табылган гипотезаны исбатларга кирәклеген искәртик.

Мисал өчен $x^2 + x + 41$ квадрат өчбуынын карыйк. x урынына нуль куйсак, гади 41 санын табабыз. $x = 1$ булганда да гади 43 саны килеп чыга. Алга таба да, x урынына 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 саннарын куеп, эзлекле рәвештә шундый ук гади саннар табабыз: 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151. Шулай итеп, x урынына нинди сан куйсак та, нәтиҗәдә гади сан килеп чыга дип гипотеза ясый алабыз.

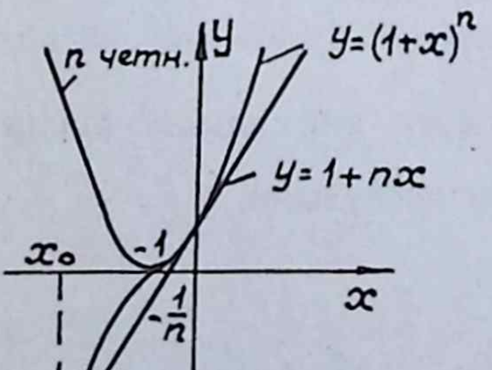
Ләкин, $x = 40$ булганда, бу өчбуын $40^2 + 40 + 41 = 1681 = 41^2$ na тигез, ягъни гади сан түгел. Шулай итеп, аерым очракта дөрес булган раслауның гомуми рәвештә дөрес булмавы бик мөмкин.

Шуны да әйтү кирәк, гипотезаны формалаштыру өчен шактый уйлап табу сәләте кирәк. Математик индукция методына тагын берничә мисал карыйк.

Беренче мисал. Бернулли тигезсезлеген исбатлагыз: әгәр $x > -1$ булса, теләсә нинди натураль n өчен түбәндәге тигезсезлек дөрес:

$(1 + x)^n \geq 1 + nx$ (3.1.).

Исбатлау. $n = 1$ булганда, тигезсезлекнең ике ягы да $1 + x$ ка тигез, тигезсезлек $n = n_0 = 1$ булганда дөрес. (3.1) тигезсезлеге $n = k \geq 1$ булганда дөрес дип фараз итик $(1 + x)^k \geq 1 + kx$ (3.2). Хәзер (3.1) тигезсезлегенең $n = k + 1$ булганда дөреслеген исбатлыйбыз $(1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)x$ (3.3). (3.2) тигезсезлегенең ике ягын да $(1 + x) > 0$ гә тапкырлап, тигезкөчле тигезсезлек табабыз $(1 + x)^{1+k} \geq (1 + kx)(1 + x) \Leftrightarrow (1 + x)^{1+k} \geq 1 + (k + 1)x + kx^2 \geq 1 + (k + 1)x$, чөнки $kx^2 > 0$. Шушы исбатлау кирәк тә иде инде.



3.8

Искәрмә. Геометрик күзлектән карaганда (3.8 рәс.), $y = 1 + nx$ тигезләмәсе $y = (1 + x)^n$ функциясе графигының (0,1) ноктасында үткәргән орынманы аңлата (бу раслауны уйлагыз).

3.8 рәсеменнән күренгәнчә, (3.1) тигезсезлеге n җөп булганда теләсә нинди x өчен дә дөрес ($x > -1$ өчен генә түгел). Ләкин n так булганда (3.1) тигезсезлеге $x \geq x_0$ өчен генә дөрес, монда $x_0 (1 + x)^{2x+1} = 1 + (2k + 1)x$ тигезләмәсенең тамыры.

Икенче мисал. Әгәр n натураль сан булса, $\left(n^2 - n\right)$ санының җөп сан икәнен исбатлагыз.

Исбатлау. $n = 1$ булганда, $1^2 - 1 = 0$ җөп сан. Әйтик, $\left(k^2 - k\right)$ җөп сан ди, шулай булгач, $(k+1)^2 - (k+1) = \left(k^2 + 2k + 1\right) - (k+1) = \left(k^2 - k\right) + 2k$, ә $2k$ җөп сан булганлыктан, $(k+1)^2 - (k+1)$ шулай ук җөп сан була. Шуны исбатлау кирәк иде дә инде.

Өченче мисал. Бер-бер артлы килгән өч натураль санның кублары суммасының 9 га бүленүен исбатлагыз.

Исбатлау. $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ ның 9 га бүленүен исбатларга кирәк, монда n — натураль сан.

$n = 1$ булганда, $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$ була һәм ул 9 га бүленә. Әйтик, $k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3$ суммасы 9 га бүленсен ди. Ул вакытта $(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 = (k+1)^3 + (k+2)^3 + k^3 + \left(9k^2 + 27k + 27\right) = k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 + 9\left(k^2 + 3k + 3\right)$ аңлатмасы ике санның суммасын күрсәтә, аларның һәрберсе дә 9 га бүленә, димәк, аларның суммасы шулай ук 9 га бүленә. Шуны исбатларга кирәк иде дә инде.

Дүртенче мисал. Арифметик прогрессиянең гомуми буынының формуласын чыгарыгыз.

Чишү. Билгеләмә буенча:

$$a_2 = a_1 + d, \quad a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d, \quad a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d.$$

Прогрессиянең гомуми буыны өчен

$$a_n = a_1 + (n-1)d \tag{3.4}$$

дип фараз итәргә мөмкин.

Хәзер бу формуланың дөреслеген исбатлыйк. $n = 1$ булганда ул дөрес: $a_1 = a_1 + 0d = a_1$. $n = k$ өчен (3.4) формуласы дөрес дип исәплик: $a_k = a_1 + (k-1)d$, ул вакытта $a_{k+1} = a_k + d = a_1 + (k-1)d + d = a_1 + kd$, яки $a_{k+1} = a_1 + \left[(k+1) - 1\right]d$ (3.5), ягъни без $n = k + 1$ булганда (3.4) формуласын табабыз. Формуланың дөреслеге исбатланды.

Бишенче мисал. Исбатларга: $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}(n \in N)$.

Исбатлау. $n = 1$ булганда формула дөрес.

Әйтик, $n = k$ булганда формула дөрес булсын: $\left(x^k\right)' = kx^{k-1}$, аның $n = k+1$ булганда дөреслеген исбатлау кирәк.

$\left(x^{k+1}\right)' = (k+1)x^k \cdot x^{k+1} = x^k \cdot x$ булганлыктан, тапкырчыгышларны дифференциаллау формуласын кулланып, табабыз: $\left(x^{k+1}\right)' =$ $= \left(x^k\right)' x + x^k(x)' = kx^{k-1}x + x^k \cdot 1 = (k+1)x^k$. Шушыны исбатларга кирәк иде дә.

Күнегүләр

1. $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ булуын исбатларга.

2. Арифметик прогрессиянең буыннары суммасын табу формуласын чыгарыгыз: $S = \frac{(a+l)n}{2}$.

3. Геометрик прогрессиянең буыннары суммасын табу формуласын исбатлагыз: $S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$.

4. Геометрик прогрессиянең теләсә кайсы буынын табу формуласын чыгарыгыз.

5. $n^3 - n = 3k$ булуын исбатлагыз, монда n һәм k — натураль саннар, ягъни $n,\ k \in N$.

6. $n^2 + 3n + 2 = 2k$ булуын исбатлагыз, монда $n,\ k \in N$.

7. Әгәр n — так сан булса, $n^2 - 1$ саны дүрткә бүленүен исбатлагыз, ягъни $n^2 - 1 = 4k$, биредә $n,\ k \in N$.

8. Арифметик прогрессиянең теләсә кайсы буынын табу формуласын чыгарыгыз.

7. НЬЮТОН БИНОМЫ

$(a+b)^n$ аңлатмасын карыйк, биредә n — натураль сан, a, b — теләсә нинди реаль саннар. $n=2$ һәм $n=3$ булганда, таркату формулалары билгеле:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^3.$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

$(a+b)^n$ аңлатмасын таркатканда түбәндәге буыннарның булуын фараз итү табигый:

$$a^n,\ \ a^{n-1}b,\ \ a^{n-2}b^2, \dots, a^{n-m}b^m, \dots, b^n.$$

Беренче һәм соңгы буынның коэффициентлары 1 гә тигез, ә $a^{n-m}b^m$ алдында торган билгесез коэффициентны C_n^m аша билгелик ($C_n^0 = C_n^n = 1$ дип уйлыйк).

Эзли торган таркату түбәндәге рәвештә була дип фараз итик:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \ldots + C_n^m a^{n-m}b^m + \ldots + C_n^n b^n. \qquad (3.6)$$

Бу формуланы математик индукция методы белән исбатлыйбыз. $n=1$ булганда (3.6) формуласы дөрес, чөнки $(a+b)^1 = C_1^0 a + C_1^1 b = a + b$.

Әйтик, $n=k$ булганда (3.6) формуласы дөрес булсын:

$$(a+b)^k = C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1}b + \cdots + C_k^{m-1} a^{k-m+1} b^{m-1} + + C_k^m a^{k-m} b^m + \cdots + C_k^k b^k. \qquad (3.7)$$

Хәзер $n = k+1$ өчен (3.6) формуласын исбатлыйк. (3.7) тигезлегенең ике кисәген дә $(a+b)$ га тапкырлыйбыз:

$$(a+b)^{k+1} = \Big(C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1}b + \cdots + C_k^{m-1} a^{k-m+1} b^{m-1} + + C_k^m a^{k-m} b^m + \cdots + C_k^k b^k\Big)(a+b) = C_k^0 a^{k+1} + \left(C_k^1 + C_k^0\right) a^k b + \cdots + + \left(C_k^m + C_k^{m-1}\right) a^{k-m+1} b^m + \cdots + C_k^k b^{k+1}. \qquad (3.8)$$

$C_k^0 = C_{k+1}^0 = 1,\ C_k^k = C_{k+1}^{k+1} = 1$ икәнен искә алып һәм

$$C_k^m + C_k^{m-1} = C_{k+1}^m \tag{3.9}$$

дип билгеләп, (3.8) тигезлеген түбәндәге рәвештә язабыз:

$$(a+b)^{k+1} = C_{k+1}^0 a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k b + \dots + C_{k+1}^m a^{k+1-m} b^m + \dots + \\ + C_{k+1}^{k+1} b^{k+1}. \tag{3.10}$$

$n = k+1$ булганда (3.10) тигезлеге (3.6) тигезлеге рәвешен алды. Шулай итеп, (3.6) формуласының дөреслеген $n = 1$ булганда һәм, $n = k$ дөрес дип исәпләп, $n = k+1$ булганда исбатладык. Димәк, математик индукция принцибы нигезендә, (3.6) формуласы теләсә нинди натураль сан өчен дә дөрес.

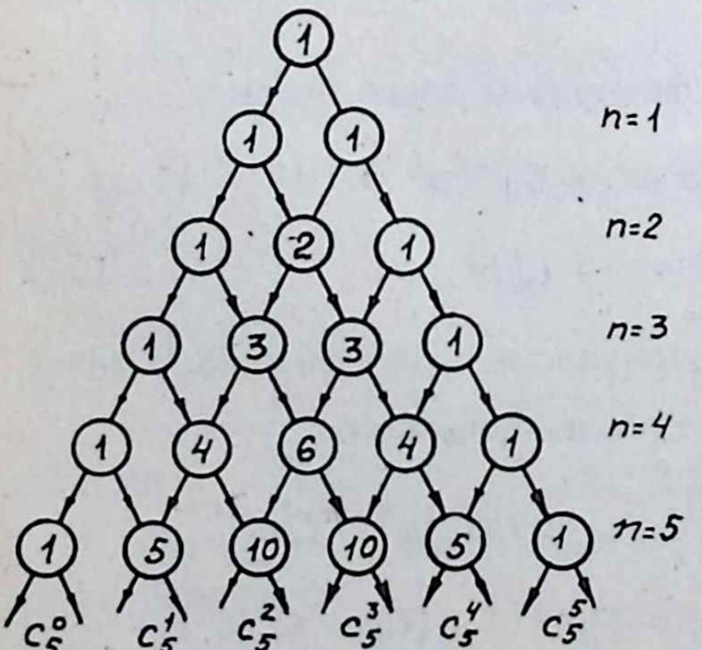
Бу таркату формуласы (3.6) *Ньютон биномы* дип атала. C_n^m саны биномиаль коэффициент дип атала. (3.9) формуласына таянып, ул түбәндәге формула ярдәмендә исәпләнә.

$$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1},\ m = 1, 2, \dots,\ n-1.$$

$n = 2;\ 3;\ 4$ өчен биномиаль коэффициентларны исәплик.

$n = 2$ булганда $(m = 1)$ исәплибез: $(a+b)^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2$, биредә $C_2^1 = C_1^1 + C_1^0 = 1 + 1 = 2,\ C_2^0 = C_2^2 = 1.$

$n = 3$ булганда $(m = 1;\ 2)$, табабыз: $(a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 b^3$; биредә $C_3^1 = C_2^1 + C_2^0 = 2 + 1 = 3,\ C_3^2 = C_2^2 + C_2^1 = 1 + 2 = 3,\quad C_3^0 = C_3^3 = 1.$



3.9

$n = 4$ $(m = 1,\ 2,\ 3)$ булганда исәплибез: $(a+b)^4 = C_4^0 a^4 + C_4^1 a^3 b + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 ab^3 + C_4^4 b^4$; биредә $C_4^1 = C_3^1 + C_3^0 = 3 + 1 = 4,$

$C_4^2 = C_3^2 + C_3^1 = 3 + 3 = 6.\ \ C_4^3 = C_3^3 + C_3^2 = 1 + 3 = 4,\ \ C_4^0 = C_4^4 = 1.$

Биномиаль коэффициентны теләсә нинди n өчен дә исәпләргә була. Исәпләүләр нәтиҗәсен Паскаль өчпочмагы рәвешендә күрсәтү уңайлы (3.9 рәс.).

Таблицаның икенче юлын табу өчен алдагы юлның янәшә торган саннарын ук юнәлешендә кушу кирәк.

Мәсәлән, $n = 5$ өчен болай була:

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Биномиаль коэффициентларны ачык аңлатма рәвешендә табабыз. Моның өчен $(a + b)^n$ биномын n тапкырланучы рәвешендә языйк: $(a + b_1)(a + b_2)\ldots(a + b_n)$, биредә икенче кушылучыларга 1 дән n га кадәр номерлар бирелгән. Эзлекле рәвештә җәяләрне ачып, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$. очраклары өчен табабыз:

$$a + b_1;$$

$$a^2 + (b_1 + b_2)a + b_1b_2;$$

$$a^3 + a^2(b_1 + b_2 + b_3) + a(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3) + b_1b_2b_3.$$

Соңгы аңлатмада a^2 кергән кушылучылар саны $\{b_1, b_2, b_3\}$ күплегенең бер элементлы күплекчәләре санына, ягъни өч элементтан бер элементлы оештырмалар санына тигез; a кергән кушылучылар саны ике элементлы күплекчәләре санына тигез, ягъни C_3^2, ниһаять, a кермәгән кушылучылар саны C_3^3 кә тигез.

Шулай итеп, теләсә нинди n өчен $C_n^0 = 1$ һәм $b_1 = b_2 = b_3 = b$ дип, табабыз $(a + b)^3 = C_3^0a^3 + C_3^1a^2b + C_3^2ab^2 + C_3^3b^3$.

Шулай ук фикер йөртеп табабыз: $(a + b)^2 = C_2^0a^2 + C_2^1ab + C_2^2b^2$.

(3.7) тигезлеге дөрес дип һәм оештырмалар өчен үзлегеннән файдаланып, $C_k^m + C_k^{m-1} = C_{k+1}^m$ (3.10) тигезлегенең дөрес булуын күрәбез.

Нәтиҗәдә Ньютон биномы формуласы (3.6) рәвешендә була, биредә $a^{n-m}b^m$ янындагы коэффициент n элементтан m лы оештырмалар санына тигез:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \qquad (3.11)$$

Ньютон биномының гомуми рәвеше болай языла:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \dots +$$

$$+ \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}a^{n-m}b^m + \dots + b^n.$$

Биномиаль коэффициентларның үзлекләре

1. Биномиаль коэффициентларның саны $n+1$ гә тигез.

2. Таркатманың ике очыннан бер үк ераклыкта торган буыннарның коэффициентлары үзара тигез була: $C_n^m = C_n^{n-m}$.

Дөрестән дә, (3.11) формуласы буенча: $C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!} = C_n^m$.

(3.9 рәсемен карагыз.)

3. Барлык биномиаль коэффициентларның суммасы 2^n гә тигез була. Чыннан да, бином формуласында $a=b=1$ дип куйсак, $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$ икәнлеген табабыз.

4. Так урыннарда торучы биномиаль коэффициентларның суммасы җөп урыннарда торучы биномиаль коэффициентлар суммасына тигез була. Аларның һәрберсе 2^{n-1} нә тигез.

Мәсәлән, $n=5$ өчен, Паскаль өчпочмагыннан күренгәнчә, $1+10+5=5+10+1=16=2^4$.

Бу үзлекне исбатлыйк: $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}(+b) + C_n^2 a^{n-2}(+b)^2 + \dots + C_n^m a^{n-m}(+b)^m + \dots + C_n^n(+b)^n$ таркатмасында b ны $-b$ га алыштырып, табабыз: $(a-b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}(-b) + C_n^2 a^{n-2}(-b)^2 + \dots + C_n^m a^{n-m}(-b)^m + \dots + C_n^n(-b)^n$.

Бу тигезлектә $a=b=1$ дип куйсак, $0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + C_n^m(-1)^m + \dots + C_n^n(-1)^n \Leftrightarrow C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots + C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots$ икәнлеген табабыз.

5. Биномиаль коэффициентларның экстремаль үзлеге.

Таркатмада коэффициентлар башта үсәләр, аннан соң кимиләр. Ике яктан тигез ераклыкта торган буыннарның коэффициентлары бердәй булганлыктан, иң зур коэффициент таркатманың уртасында булырга тиеш. Аның өстенә, таркатманың буыннары саны так булганда (биномның дәрәҗә күрсәткече җөп сан булганда) уртада иң зур коэффициентлы буын бер генә була, әгәр буыннар саны җөп булса (бином дәрәҗә күрсәтүче так сан булганда), уртада иң зур һәм тигез коэффициентлы буыннар икәү булырга тиеш. (Паскаль өчпочмакны карагыз.)

Искәрмә. Ньютон биномы таркатмасының бер буыны кайсы очракта T_{m+1} символы белән тамгалана:

$$T_{m+1} = C_n^m a^{n-m} b^m (m = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Хәзер берничә мәсьәлә чишик.

Беренче мәсьәлә. $\left(ax + x^{-\frac{1}{4}}\right)^n$ таркатмасының так коэффициентлар суммасы 512 гә тигез. x булмаган кушылучыны табыгыз.

Чишү. Мәсьәләнең шарты буенча биномиаль коэффициентларның өченче үзлеге буенча табабыз: $2^{n-1} = 512 \Rightarrow 2^{n-1} = 2^9 \Rightarrow n = 10$.

Таркатманың теләсә кайсы буыны түбәндәге рәвештә языла:

$$T_{m+1} = C_n^m a^{n-m} b^m = C_{10}^m (ax)^{10-m} \left(x^{-\frac{1}{4}}\right)^m =$$

$$= C_{10}^m a^{10-m} x^{10-m} x^{-\frac{m}{4}} = C_{10}^m a^{10-m} x^{10-\frac{5m}{4}}.$$

Безгә x булмаган буынны табу кирәк, димәк, $10 - \frac{5m}{4} = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow m = 8$ булырга тиеш.

Җавап. $T_9 = C_{10}^8 a^2 = 45a^2$.

Икенче мәсьәлә. $(a + b)^n$ таркатмасының барлык коэффициентлары суммасы 4096 булса, иң зур коэффициент нигә тигез?

Чишү. Шарт буенча (өченче үзлекне карагыз) $2^n = 4096 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2^n = 2^{12} \Rightarrow n = 12$; n җөп сан булганлыктан, иң зур коэффициент бер генә була:

$$C_{12}^6 = \frac{12!}{6!\,6!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{6!} = 924.$$

Җавап. $C_{12}^6 = 924$.

Өченче мәсьәлә. $\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}\right)^{63}$ таркатмасының барлык рациональ буыннарын табарга.

Чишү. Таркатма буынның гомуми язылышы:

$$T_{m+1}=C_{63}^{m}\left(x^{\frac{63-m}{3}}\right)\left(x\right)^{\frac{m}{6}}=C_{63}^{m}x^{21-\frac{m}{6}}.$$

Таркатманың буыны x тулы дәрәҗәгә күтәрелгәндә генә рациональ була, димәк, m алтыга бүленергә тиеш: $m=6k$ $(k=0,1,2,\dots,10)$.

Җавап. $C_{63}^{6k}x^{21-k}$ $(k=0,1,2,\dots,10)$.

Дүртенче мәсьәлә. $\left(x^2-\frac{1}{4}\right)^n$ таркатмасының x янындагы өченче буын коэффициенты 31 гә тигез. Бу таркатманың сигезенче буынын табыгыз.

Чишү. Таркатманың һәр буыны формуласын кулланып, өченче буынны табабыз: $T_{2+1}=C_n^2\left(x^2\right)^{n-2}\left(-\frac{1}{4}\right)^2=C_n^2\frac{1}{16}x^{2n-4}$.

Шарт буенча $C_n^2\frac{1}{16}=31\Rightarrow\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{16}=31$, $n_1=32$, $n_2=-31$ (ярамый). Таркатманың сигезенче буыны: $T_8=T_{7+1}=C_{32}^7\left(x^2\right)^{32-7}\left(-\frac{1}{4}\right)^7=-C_{32}^7\frac{x^{50}}{4^7}$.

Җавап. $T_8=-C_{32}^7\frac{x^{50}}{4^7}$.

Күнегүләр

1. Бином таркатмасының уртадагы ике буынын табыгыз $(a-2b)^5$.

2. $(x+b)^m$ таркатмасының дүртенче һәм алтынчы буыннар коэффициентлары чагыштырмасы $5:18$ гә тигез. m ны табыгыз.

3. Әгәр $\left(2nx+\frac{1}{2nx^2}\right)^{3n}$ таркатмасының коэффициентлары суммасы 64 кә тигез булса, x булмаган кушылучыны табыгыз.

4. $\left(\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt[10]{\frac{a^7}{b^3}}\right)^n$ таркатмасында ab булган буын бар. Шул буынны табыгыз.

5. Дүртенче буынның өченче буынга чагыштырмасы $3\sqrt{2}$ тигез булсын өчен $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+3\right)$ не нинди натураль дәрәҗәгә күтәрергә кирәк?

6. $(a+b)^{n+1}$ һәм $(a+b)^{n}$ таркатмаларының өченче буыннар коэффициентлары аермасы 225 кә тигез. Рациональ булган буыннар санын табыгыз.

7. Таркатманың ике башыннан дүртенче урында торган буыннарның тапкырчыгышы 14400 булса, $\left(n+\frac{1}{n}\right)^{n}$ таркатмасының иң зур биномиаль коэффициентын табыгыз.

8. $\left(2x+\frac{1}{x^{2}}\right)^{m}$ таркатмасының өченче буыны x лы булмый. m ның нинди кыйммәтләре өчен бу кушылучы $\left(1+x^{3}\right)^{30}$ таркатмасының икенче кушылучысына тигез?

9. $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^{20}$ таркатмасының иң зур кушылучысын табарга.

10. x ның нинди кыйммәте өчен $(5+3x)^{10}$ таркатмасының иң зур кушылучысы дүртенче буын була?

Җаваплар

1. $C_5^2 a^3 \cdot 4b^2$; $-C_5^2 a^2 8b^3$. 2. 12. 3. $C_{10}^8 a^2 = 45a^2$.
4. $252\ ab$. 5. 55440. 6. 6. 7. 252.
8. $x = 2$. 9. $314925 \cdot 10^5$, 9 нчы кушылучы.
10. $5/8 < x < 20/21$.

IV бүлек

ВЕКТОРЛАР АЛГЕБРАСЫ ЭЛЕМЕНТЛАРЫ

1. ТӨП БИЛГЕЛӘМӘЛӘР

Көч, тизлек, тизләнеш һәм башка шундый физик зурлыклар үзләренең санча кыйммәтләре белән генә түгел, бәлки юнәлешләре белән дә характерланалар. Мәсәлән, җисемнең билгеле бер моменттагы хәрәкәтен аңлату өчен, ул 60 км/с тизлек белән хәрәкәт итә дип әйтү генә җитми, аның хәрәкәт юнәлешен, ягъни тизлек юнәлешен дә күрсәтергә кирәк. Шуңа күрә, әлеге физик зурлыкларны юнәлешле кисемтәләр белән сурәтләү җайлы.

AB юнәлешле кисемтәсе (4.1 рәс.) вектор дип атала, биредә A — *векторның башлангычы, B векторның ахыры* дип атала, $\vec{AB}$ яки $\bar{a}$ дип языла. Сызымда векторның юнәлеше ук белән күрсәтелә. AB кисемтәсенең озынлыгы $\vec{AB}$ векторының модуле дип атала һәм $|\bar{a}|$ яки $|\vec{AB}|$ символы белән тамгалана.

Векторлар өч группага бүленәләр:

1) ирекле векторлар, бу векторларны үзләренә параллель рәвештә теләсә кайсы урынга күчерергә була, алар модуль һәм юнәлеш белән генә характерлана, аларның башлангычы итеп пространстводагы теләсә нинди ноктаны алырга була;

2) шума векторлар, бу векторларны бирелгән туры буйлап кына теләсә нинди урынга күчерергә була, бу туры векторның тәэсир итү сызыгы дип атала, мондый векторлар озынлыклары, юнәлешләре һәм үзләре ята торган туры белән характерланалар. Шума векторның башлангычы итеп ул ята торган турының теләсә нинди ноктасын алырга була;

3) озынлыклары, юнәлешләре һәм башлангыч нокталары белән характерланган векторлар бәйле векторлар дип атала.

Бу дәреслектә без ирекле векторлар белән генә эш итәрбез, киләчәктә "вектор" сүзе "ирекле вектор" сүзе булуын күз алдында тотарбыз, алар, югарыда күрсәткәнчә, озынлыклары һәм юнәлешләре белән генә характерланалар.

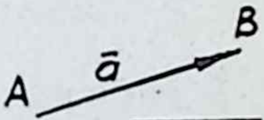
Әгәр ике вектор параллель күчерү нәтиҗәседә тәңгәл килсәләр, *тигез векторлар* дип атала. Моннан тигез векторларның юнәлеш-

ләре бердәй һәм абсолют зурлыклары тигез диган нәтиҗә килеп чыга. Векторларның тигезлеге (4.2 рәс.) түбәндәге рәвештә языла:

$$\vec{a} = \vec{b} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

Модуле нульгә тигез булган вектор *нуль-вектор* дип атала, $\bar{0}$ белән тамгалана. Нуль булмаган ике векторның юнәлешләре тәңгәл килсә яки капма-каршы булса, алар *коллинеар* векторлар дип атала. Алар параллель кисемтәләр белән сурәтләнә. $\bar{a}$ һәм $\bar{b}$ коллинеар векторларын $\bar{a} \| \bar{b}$ рәвешендә язарбыз. $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$ һәм $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$ символлары коллинеар векторларның бер үк яки капма-каршы юнәлештә булуын күрсәтәләр.

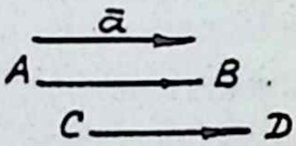
Нуль булмаган векторларның юнәлешләрен күрсәтүче нурлар бер яссылыкка параллель булсалар, компланар векторлар дип аталалар.



4.1

Векторның абсолют зурлыгы берәмлеккә тигез булса, ул *берәмлек вектор* яки *орт* дип атала.

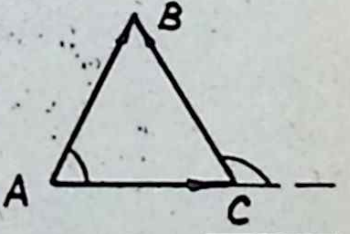
Теләсә нинди $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары арасындагы почмак дип аларга тигез булган уртак башлангычлы векторлар арасындагы почмакларның кечерәгенә әйтәләр. Бердәй юнәлештәге векторлар арасындагы почмак нульгә тигез $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары арасындагы почмак зурлыгы $(\bar{a} \,\hat{}\, \bar{b})$ символы белән тамгалана. Билгеләмәдән күренгәнчә, ике вектор арасындагы почмакның кыйммәте $[0; \pi]$ кисемтәсендә ята (4.3 рәс.).



4.2

4.3

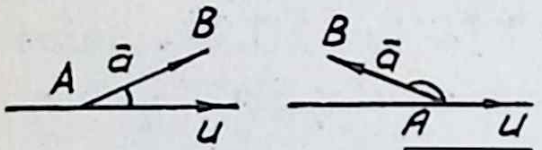
Мисал. Тигезьяклы ABC өчпочмагы бирелгән. $\overrightarrow{AB}$ һәм $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC}$ һәм $\overrightarrow{CB}$ векторлары арасындагы почмакларның зурлыгын табарга.



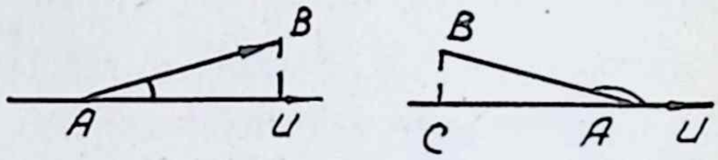
4.4

Чишү. $(\overrightarrow{AB} \,\hat{}\, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$, $(\overrightarrow{AC} \,\hat{}\, \overrightarrow{CB}) = \frac{2\pi}{3}$, чөнки AC һәм CB векторларын уртак башлангычка китерсәк, алар арасындагы почмак өчпочмакның тышкы почмагы була (4.4 рәс.).

Күчәр белән вектор арасындагы почмакның билгеләмәсен карыйк. U күчәре һәм $\vec{a}$ вектор бирелсен, күчәрнең теләсә нинди ноктасын алып $\vec{a}$ векторын үткәрәбез, мәсәлән, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. $\vec{a}$ векторы һәм U күчәре арасындагы почмак дип, $\overrightarrow{AU}$ нуры һәм $\overrightarrow{AB}$ векторы арасындагы кечерәк почмак атала, димәк, вектор белән күчәр арасындагы почмакның кыйммәте $[0; \pi]$ кисемтәсендә ята (4.5 рәс.).



4.5



4.6

$\vec{a}$ векторының U күчәренә проекциясе дип $|\vec{a}|\cos\alpha$ тапкырчыгышын атыйлар, биредә α — вектор белән күчәр арасындагы почмак. Бу проекция $пр_u\vec{a}$ символы белән тамгалана ($\vec{a}$ векторының U күчәренә проекциясе дип укыла), ягъни 4.6 рәсемендә күренгәнчә, $пр_u\vec{a}$ ABC өчпочмагындагы AC катетының озынлыгын, α почмагына бәйле рәвештә, “+” яки “–” тамгасына тапкырлап табыла.

Мисал. Тигезьяклы ABC өчпочмагында (4.4 рәс.) якларның озынлыгы 2 гә тигез. $Пр_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{CB}$ ны табарга.

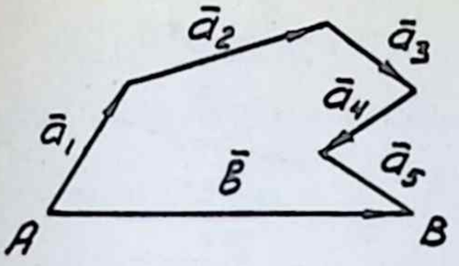
Чишү. Билгеләмә буенча

$$Пр_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CB}|\cos(\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{CB}) = 2\cos\frac{2\pi}{3} = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -1.$$

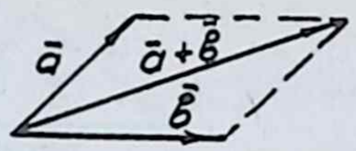
2. ВЕКТОРЛАР БЕЛӘН СЫЗЫКЧА ОПЕРАЦИЯЛӘР

2.1. Векторларны кушу

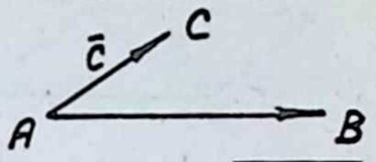
$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots, \vec{a}_n$ векторларының суммасы дип, яклары кушылучы векторларча төзелгән күппочмакның йомучы векторы (4.7 рәс.) атала (*күппочмак кагыйдәсе*). Бу кагыйдәдән ике векторның суммасы өчен *параллелограмм кагыйдәсе* килеп чыга (4.8 рәс.).



4.7



4.8



4.9

Әгәр A җисеменә $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ көчләре куелган булса, ул вакытта физик тәҗрибә аларның тәэсире $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ якларында төзелгән параллелограммның диагонале белән сурәтләнгән $\vec{c}$ көченең тәэсиренә тигез икәнен күрсәтә.

Векторларны кушуның үзлекләре.

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ — кушуның урын алыштыру законы.

2. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ — кушуның оештыру законы.

Мисал. Әгәр $\bar{c}=\bar{a}+\bar{b}$, $|a|$ һәм $\vec{a}$ векторының юнәлеше билгеле булса, $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторларының геометрик төзелешен сурәтләгез.

Чишү (4.9 рәс.). $\vec{c}$ векторының башлангычыннан $\vec{a}$ векторы юнәлешендә нур үткәрәбез. Бу нур өстенә $|AB|=|a|$ озынлыгында кисемтә салабыз һәм ягы AB, диагонале AC (4.10 рәс.) булган параллелограмм төзибез. Параллелограмм кагыйдәсе нигезендә $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$, ягъни $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$.

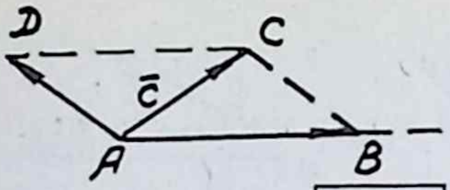
Шуны да әйтеп китик, бер туры өстендә ятмаучы A, B, C нокталары өчен $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ тигезлеге дөрес. Бу "*өчпочмак кагыйдәсе*" дип атала.

2.2. Капма-каршы векторлар. Векторларны алу

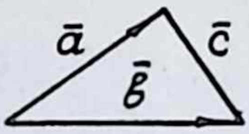
Өчпочмак кагыйдәсен кулланып, $\overrightarrow{AB}$ һәм $\overrightarrow{BA}$ векторларының суммасын табыйк:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}.$$

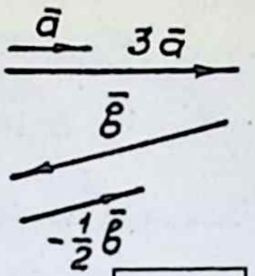
Ике векторның суммасы нуль-векторга тигез булса, бу ике вектор *капма-каршы векторлар* дип атала. $\vec{a}$ векторына капма-каршы векторны $-\vec{a}$ дип тамгалыйлар. Билгеләмәдән $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}$ икәне килеп чыга.



4.10



4.11



4.12

Әгәр $\overline{c} + \overline{b} = \overline{a}$ булса, $\overline{c}$ векторы $\overline{a}$ һәм $\overline{b}$ *векторларының аермасы* дип атала. $\overline{a} - \overline{b} = \overline{a} + \left(-\overline{b}\right)$ икәнен исбатларга була. $\overline{a} - \overline{b}$ векторын төзү өчен $\overline{a}$ һәм $\overline{b}$ ны уртак башлангычка китерәбез. Параллелограмм кагыйдәсен кулланып, $\overline{c} = \overline{a} - \overline{b}$ векторын $\overline{a} = \overline{b} + \overline{c}$ шартыннан чыгып табабыз (4.11 рәс.). $\overline{c}$ векторы киметүче векторның ахырыннан кимүче векторның ахырына таба юнәлгән.

2.3. Векторны санга тапкырлау

$\vec{b} = \lambda\vec{a}$ векторы $\vec{a}$ векторының λ санына тапкырчыгышы дип атала. Биредә $\left|\vec{b}\right| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$. Әгәр $\lambda > 0$ булса, $\lambda\vec{a}$ векторының юнәлеше $\vec{a}$ векторының юнәлеше белән туры килә, ягъни $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$, әгәр $\lambda < 0$ булса, $\vec{a}$ векторының юнәлешенә капма-каршы була. Аерым очракта, $\lambda = -1$ булганда, $\vec{b} = (-1)\vec{a}$, векторы $\vec{a}$ векторына капма-каршы була.

Векторны санга тапкырлау үзлекләре:

1. $\lambda\left(\overline{a} + \overline{b}\right) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ санлы тапкырлаучының векторлар суммасына карата дистрибутивлыгы.

2. $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ санлы тапкырлаучыларның ассоциативлыгы.

Теорема. $\overline{a} \parallel \overline{b}$ булса, $\overline{a} = \lambda\vec{b}$ тигезлеге үтәлерлек λ саны була.

Мисаллар. а) $\vec{a}$ векторына коллинеар булган берәмлек (орт) векторын табыгыз.

Чишү. $\vec{a}_0 = \pm\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$, чөнки $\left|\vec{a}_0\right| = \frac{1}{|\vec{a}|}\left|\vec{a}\right| = 1$.

Мәсьәләнең ике чишелеше бар.

б) Әгәр $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$ булса, $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторларының бәйләнешен табыгыз.

Чишү. $|\vec{a}_0| = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{a}}{3} \uparrow\uparrow \vec{a}$ — векторны санга тапкырлау үзлеге буенча, $\vec{c} = 5\vec{a}_0 \uparrow\uparrow \vec{a}$ һәм $|\vec{c}| = 5|\vec{a}_0| = 5$, димәк, $\vec{c}$ һәм $\vec{b}$ векторлары, $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ булганлыктан, капма-каршы, ягъни $\vec{b} = -\vec{c}$, моннан $\vec{b} = -5\vec{a}_0 = -\frac{5}{3}\vec{a}$. Нәтиҗәдә, $\vec{b} = -\frac{5}{3}\vec{a}$

в) Бирелгән $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары буенча $3\vec{a}$, $-\frac{\vec{b}}{2}$, $\frac{\vec{a}}{2} - 3\vec{b}$ векторларын төзегез.

Чишү. $3\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$ һәм $\vec{a}$ дан өч тапкыр озынрак, $-\frac{\vec{b}}{2} \downarrow\uparrow b$ һәм $\vec{b}$ дан ике мәртәбә кыскарак (4.12 рәс.). $\frac{\vec{a}}{2} - 3\vec{b}$ векторын төзү өчен $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторларын уртак башлангычка китерәбез һәм $\frac{\vec{a}}{2}$ һәм $3\vec{b}$ векторларын төзибез, аннан соң, векторларны алу кагыйдәсен файдаланып (4.13 рәс.), эзләгән векторны табабыз.

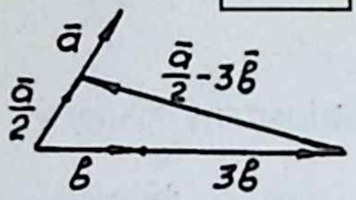
г) $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ һәм $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$ векторлары $ABCD$ параллелограммының диагональләрен тәшкил итәләр. $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары аша $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ векторларын күрсәтегез.

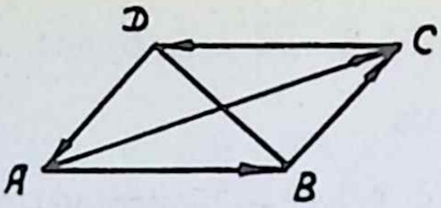
Чишү. Кушу кагыйдәсен кулланабыз: (4.14 рәс.) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$, ләкин $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{\vec{a}}{2}$, $\overrightarrow{OB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = -\frac{\vec{b}}{2}$, димәк, $\overrightarrow{AB} = \frac{\vec{a}}{2} - \frac{\vec{b}}{2}$. Аналогик рәвештә $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{\vec{b}+\vec{a}}{2}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD} = -\frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b}}{2} = \frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}$, $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OA} = -\frac{\vec{b}}{2} - \frac{\vec{a}}{2} = -\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$.

д) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ булсын өчен $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторларының нинди үзенчәлекләре булырга тиеш?

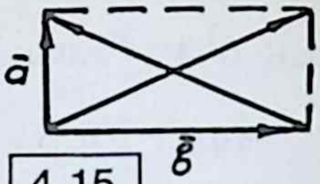
Чишү. $\vec{a} + \vec{b}$ һәм $\vec{a} - \vec{b}$ — яклары $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары булган параллелограммның диагональләре. Параллелограммның диагональләре бу параллелограмм турыпочмаклы булганда гына тигез, нәтиҗәдә безнең аңлатма ортогональ векторлар өчен дөрес була (4.15 рәс.), ягъни $\vec{a} \perp \vec{b}$ булырга тиеш.

4.13



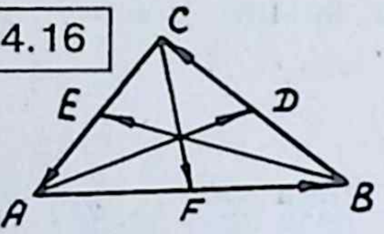


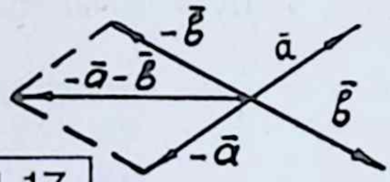
4.14



4.15

4.16





4.17

е) ABC өчпочмагында AD, BE, CF медианалары үткәрелгән. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}$ суммасын табыгыз.

Чишү. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ векторларын карыйк (4.16 рәс.). Сызымнан күренгәнчә, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0$. $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CF}$ векторларын $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ векторлары аша күрсәтик:

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},\quad \overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA},\quad \overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=$$

$$=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{CA}=\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)=\frac{3}{2}\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}.$$

Күнегүләр

1. Бирелгән $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары аша $-\vec{a}-\vec{b}$ векторын төзегез (4.17 рәс.).

2. $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ үзара перпендикуляр. Әгәр $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=12$ булса, $|\vec{a}+\vec{b}|$ һәм $|\vec{a}-\vec{b}|$ озынлыкларын табыгыз.

3. ABC өчпочмагында AD медианасы үткәрелгән. $\overrightarrow{AB}$ һәм $\overrightarrow{AC}$ аша $\overrightarrow{AD}$ны табыгыз.

4. а) $\overline{a} + \overline{b} = \lambda(\overline{a} - \overline{b})$, б) $\frac{\overline{a}}{|\overline{a}|} = \frac{\overline{b}}{|\overline{b}|}$ аңлатмалары урынлы булсын өчен $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторларының нинди аерым үзенчәлекләре булырга тиеш?

5. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ һәм $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ векторлары бирелгән. $\overrightarrow{OM} = \vec{a} + \vec{b}$ векторы AOB почмагының биссектрисасына параллель булсын өчен $\overline{a}$ һәм $\overline{b}$ векторларының нинди үзенчәлекләре булырга тиеш?

6. K һәм L нокталары — $ABCD$ параллелограммының BC һәм CD якларының урталары. Өстәвенә $\overrightarrow{AK} = \vec{m}$, $\overrightarrow{AL} = \vec{n}$. $\vec{m}$ һәм $\vec{n}$ аша $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ векторларын табыгыз.

7. Компланар булмаган $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{q}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{r}$ векторларыннан $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеды төзелгән. $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ аша параллелепипедның калган кабыргаларын һәм диагональләрен күрсәтегез.

8. Тигезьяклы $ABCD$ трапециясенең нигезе AB, ян яклары AD, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $(\overline{a}, \hat{\ } \overline{b}) = \frac{\pi}{3}$. $\overline{a}$ һәм $\overline{b}$ векторлары аша $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ векторларын күрсәтегез.

Җаваплар

1. 4.17 рәс.

2. $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| = 13$.

3. $\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$.

4. $\vec{a} \parallel \vec{b}$; $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.

5. $|\overline{a}| = |\overline{b}|$.

6. $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}(4\overline{n} - 2\overline{m})$; $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}(2\overline{n} - 4\overline{m})$.

7. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{A_1D_1} = \vec{q}$; $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{D_1C_1} = \overrightarrow{A_1B_1} = \vec{p}$.

$\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{DD_1} = \vec{r}$; $\overrightarrow{AC} = \overline{p} + \overline{q} + \overline{r}$, $\overrightarrow{BD_1} = -\overline{p} + \overline{q} + \overline{r}$.

8. $\overrightarrow{BC} = \vec{b} - \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}$; $\overrightarrow{CD} = \frac{|\vec{b}|-|\vec{a}|}{|\vec{a}|}\vec{a}$;

$\overrightarrow{AC} = \frac{|\vec{a}|-|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a} + \vec{b}$; $\overrightarrow{BD} = \vec{b} - \vec{a}$.

3. ВЕКТОРЛАРНЫҢ СЫЗЫКЧА БӘЙЛӘНЕШЕ. ВЕКТОРЛАРНЫ ТАРКАТУ

$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n$ суммасы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ *векторларының сызыкча комбинациясе*, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ саннары *сызыкча комбинациясенең коэффициентлары* дип атала. Әгәр берсе генә булса да нульгә тигез булмаган $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ саннары өчен $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}$ тизлеге үтәлсә, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ векторлары сызыкча бәйләнешле булалар.

Әгәр сызыкча комбинация барлык коэффициентлар нульгә тигез булганда гына нуль булса, ул вакытта $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ векторлары сызыкча бәйләнешле булмыйлар.

Беренче теорема. Ике векторның сызыкча бәйләнешле булулары өчен аларның коллинеар булулары кирәк һәм шул җитә дә.

Мисаллар. а) Әгәр $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 7$ булса, $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторларының сызыкча бәйлелеген табыгыз.

Чишү. $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ булганда, $\vec{a} = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\vec{b} = \frac{2}{7}\vec{b}$ була, моннан $\vec{a} - \frac{2}{7}\vec{b} = \vec{0}$, ягъни $7\vec{a} - 2\vec{b} = \vec{0}$. $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторының сызыкча комбинациясе 7 һәм –2 коэффициентлары белән $\vec{0}$ тигез.

б) $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары 4 һәм 3 коэффициентлары белән сызыкча бәйләнешле, ягъни $4\vec{a} + 3\vec{b} = 0$. Аларның коллинеар икәнен күрсәтегез.

Чишү. $4\vec{a} + 3\vec{b} = 0$ тигезлегеннән $\vec{a} = -\frac{3}{4}\vec{b}$ килеп чыга, димәк $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Икенче теорема. Өч векторның сызыкча бәйлелеге өчен аларның компланар булулары кирәк һәм шул җитә дә.

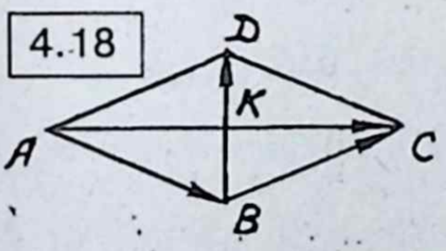
Мисал. $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ векторлары 4, 6, –2 коэффициентлары белән сызыкча бәйләнешле, ягъни $4\overline{a} + 6\overline{b} - 2\overline{c} = \overline{0}$. Аларның компланар икәнен күрсәтегез.

Чишү. $4\vec{a} + 6\vec{b} - 2\vec{c} = \vec{0}$ тигезлегеннән $2\overline{c} = 4\overline{a} + 6\overline{b}$ яки $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ килеп чыга, ягъни $\overline{c}$ векторы яклары $2\vec{a}$ һәм $3\vec{b}$ булган параллелограммның диагонале белән тәңгәл. Шулай булгач, $\vec{c}$, $2\vec{a}$, $3\vec{b}$ векторлары бу параллелограмм яссылыгында яталар, ә $\vec{a} \parallel 2\vec{a}$ һәм $\vec{b} \parallel 3\vec{b}$ булганлыктан, $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ шулай ук яссылыкка параллель булалар.

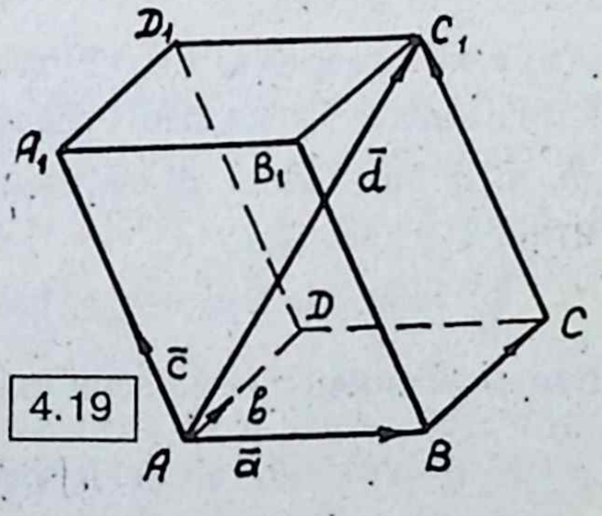
Икенче теореманың нәтиҗәсе. Әгәр $\overline{a}$ һәм $\overline{b}$ векторлары сызыкча бәйләнешле булмасалар (коллинеар булмасалар), алар белән компланар булган теләсә нинди $\overline{c}$ векторы өчен $\overline{c} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b}$ булырлык λ һәм μ саннары табыла. Бу аңлатма $\overline{c}$ векторының $\overline{a}$ һәм $\overline{b}$ векторлары юнәлешендә таркатмасы дип атала.

Мисал. $ABCD$ ромбында $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ векторларын $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары юнәлешендә таркатыгыз (4.18 рәс.).

4.18



4.19



Чишү. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\left(\overline{a} - \overline{b}\right)$;

$$\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\overline{a} + \overline{b}\right).$$

Өченче теорема. Әгәр $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ векторлары сызыкча бәйләнештә булмасалар (компланарлы булмасалар), теләсә нинди $\overline{d}$ векторы өчен $\overline{d} = \lambda_1\overline{a} + \lambda_2\overline{b} + \lambda_3\overline{c}$ булырлык λ_1, λ_2, λ_3 саннары табыла (4.19 рәс.).

Барлык дүрт векторны уртак башлангычка китерәбез һәм $\vec{d}$ векторының ахыры c_1 ноктасы аша $\overline{a}$ һәм $\overline{b}$, $\overline{a}$ һәм $\overline{c}$, $\vec{b}$ һәм $\overline{c}$ векторларына параллель итеп өч яссылык үткәрәбез; ул вакытта $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедын табабыз.

$\overline{d} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1}$ — күппочмак кагыйдәсе буенча, ләкин $\overrightarrow{AB} = \lambda_1\overline{a}$, $\overrightarrow{BC} = \lambda_2\overline{b}$, $\overrightarrow{CC_1} = \lambda_3\overline{c}$ (ни өчен?), нәтиҗәдә $\overline{d} = \lambda_1\overline{a} + \lambda_2\overline{b} + \lambda_3\overline{c}$ килеп чыга. Бу аңлатма $\vec{d}$ векторының $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ юнәлешләрендәге таркатмасы була.

Сызыкча бәйле булмаган теләсә нинди өч вектордан торган система өч үлчәнешле пространствоның базисы дип атала.

Базис итеп компланар булмаган $\overline{m}$, $\overline{n}$, $\overline{p}$ векторлары сайланган дип фараз итик, ул вакытта, өченче теорема нигезендә, теләсә нинди $\vec{a}$ векторы түбәндәгечә таркала:

$$\overline{a} = \lambda_1\vec{m} + \lambda_2\vec{n} + \lambda_3\vec{p}.$$

Бу тигезлек $\overline{a}$ векторының $\overline{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$ базисында таркатмасы дип, ә λ_1, λ_2, λ_3 саннары $\overline{a}$ векторының $\overline{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$ базисындагы координаталары дип атала.

Дүртенче теорема. Һәр $\overline{a}$ векторының координатлары $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$ базисына карата бердәнбер булалар.

$\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$ базисында $\vec{a}$ векторының ике таркатмасы бар дип фараз итик:

$$\overline{a} = \lambda_1\vec{m} + \lambda_2\vec{n} + \lambda_3\vec{p} \text{ һәм } \overline{a} = \mu_1\vec{m} + \mu_2\vec{n} + \mu_3\vec{p}.$$

Беренчесеннән икенчесен алабыз: $(\lambda_1 - \mu_1)\vec{m} + (\lambda_2 - \mu_2)\vec{n} + (\lambda_3 - \mu_3)\vec{p} = \vec{0}$, $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$ сызыкча бәйле булмаганлыктан, бу комбинациянең коэффициентлары нульгә тигез булырга тиеш. Димәк, $\lambda_1 = \mu_1$, $\lambda_2 = \mu_2$, $\lambda_3 = \mu_3$. Шуны исбат итү кирәк иде дә.

Базисларның әһәмияте шул: алар булганда, векторлар өстендәге сызыкча гамәлләр (операцияләр), саннар, ягъни бу векторларның координатлар өстендәге гамәлләргә кайтып кала.

Бишенче теорема. Теләсә нинди $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$ базисында, $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторларын кушканда, аларның координатлары кушыла, $\vec{a}$ векторын λ санына тапкырлаганда, барлык координатлар бу санга тапкырлана.

Мисал. $\overline{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ базисында $\overline{a}$ һәм $\vec{b}$ векторларының таркатмалары билгеле: $\overline{a} = 2\overline{p} + 4\vec{q} - \vec{r}$, $\overline{b} = 3\overline{p} - 5\overline{q} + 2\overline{r}$.

Бу бирелгән базиста $6\overline{b} - 4\overline{a}$ векторының координатларын табыгыз.

Чишү. $6\vec{b} = 6(3\overline{p} - 5\overline{q} + 2\overline{r}) = 18\overline{p} - 30\overline{q} + 12\overline{r}$, $-4\overline{a} = -4(2\overline{p} + 4\overline{q} - \overline{r}) = -8\overline{p} - 16\overline{q} + 4\overline{r}$, $6\overline{b} - 4\overline{a} = (18\overline{p} - 30\overline{q} + 12\overline{r}) + (-8\overline{p} - 16\overline{q} + 4\overline{r}) = 10\overline{p} - 46\overline{q} + 16\overline{r}$, димәк, эзләнелә торган векторның координатлары 10; -46; 16 була.

Әгәр базисның векторлары үзара перпендикуляр ортлар булса, ул нормальләштерелгән базис дип атала. Бу очракта базис векторларын $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ хәрефләре белән тамгалыйлар. Әгәр $\vec{a}$ векторы нормальләштерелгән базиста λ_1, λ_2, λ_3 координатларына ия булса $\left(\vec{a} = \lambda_1\vec{i} + \lambda_2\vec{j} + \lambda_3\vec{k}\right)$, аны $\vec{a} = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ рәвешендә күрсәтәләр.

Мисал. Өч вектор бирелгән: $\overline{a} = \{4; -2; 1\}$, $\overline{b} = \{0; 1; -3\}$, $\overline{c} = \{7; -4; -1\}$. $2\overline{a} - 3\overline{b} + \overline{c}$ векторын табыгыз.

Чишү. Векторны табу — бирелгән базиста бу векторның координатларын табу дигән сүз. Эзли торган векторның беренче координаты $2 \cdot 4 - 3 \cdot 0 + 7 = 15$ кә тигез (бишенче теорема). Калганнары: $2(-2) - 3 \cdot 1 + (-4) = -11$, $2 \cdot 1 - 3(-3) - 1 = 10$. Шулай итеп, $2\overline{a} - 3\overline{b} + \overline{c} = \{15; -11; 10\}$.

Бишенче теореманың нәтиҗәсе. Коллинеар векторларының тиңдәшле координатлары пропорциональ була, һәм киресенчә, әгәр ике векторның тиңдәшле координатлары пропорциональ икән, алар коллинеар була: әгәр $\overline{a} = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$, $\overline{b} = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ булса, $\overline{a} \parallel \overline{b} \Leftrightarrow \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{\lambda_3}{\mu_3}$ була.

Күнегүләр

1. Төзек $OABCDE$ алтыпочмагы бирелгән. $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ векторларын $\overline{a} = \overrightarrow{OA}$, $\overline{b} = \overrightarrow{OE}$ векторларына таркатыгыз.

2. $\vec{OA} = \overline{a}$, $\vec{OB} = \overline{b}$, $\vec{OC} = \overline{c}$ векторлары белән параллелепипед төзелгән. M — $\overline{a}$ һәм $\overline{b}$ векторларын параллель һәм C ноктасы аша үтүче кырның диагональләре кисешү ноктасы. $\vec{OM}$ векторын $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ векторларына таркатыгыз.

3. Әгәр $\overline{a} = \{3;\ 0;\ 4\}$, $\overline{b} = \{5;\ 7;\ 2\}$, $\overline{c} = \{-6;\ 1;\ -1\}$ булса, $3\overline{a} - 2\overline{b} + 4\overline{c}$ векторларын табыгыз.

4. $\overline{a} = \alpha\overline{i} + 5\overline{j} - \overline{k}$ һәм $\overline{b} = 3\overline{i} + \overline{j} - \beta\overline{k}$ векторларының коллинеарлыгыннан чыгып, α һәм β коэффициентларын (координаталарын) табыгыз.

Җаваплар

1. $\vec{OB} = 2\overline{a} + \overline{b}$, $\vec{OC} = 2\overline{a} + 2\overline{b}$, $\vec{OD} = \overline{a} + 2\overline{b}$.

2. $\vec{OM} = \frac{\overline{a}+\overline{b}}{2} + \overline{c}$.

3. $\{-25;\ -10;\ 4\}$.

4. $\alpha = 15$, $\beta = -\frac{1}{5}$.

4. ВЕКТОРЛАРНЫ СКАЛЯР ТАПКЫРЛАУ

Векторларның абсолют зурлыкларының алар арасындагы почмак косинусына тапкырчыгышы векторларның *скаляр тапкырчыгышы* дип атала. $\overline{a}$ һәм $\overline{b}$ векторының скаляр тапкырчыгышы $\overline{a} \cdot \overline{b}$, ягъни $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos(\overline{a} \,\hat{}\, \overline{b})$ дип күрсәтелә.

Мисаллар. $\overline{a}$ һәм $\overline{b}$ векторларының скаляр тапкырчыгышын табыгыз:

а) $|\overline{a}| = 8$, $|\overline{b}| = 5$, $(\overline{a} \,\hat{}\, \overline{b}) = \pi/3$;

б) $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 1$, $\overline{a} \downarrow\uparrow \overline{b}$; в) $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 4$, $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$.

Чишү. а) $\overline{a} \cdot \overline{b} = 8 \cdot 5 \cos\frac{\pi}{3} = 40 \cdot \frac{1}{2} = 20$.

б) әгәр $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$ булса, $(\overline{a} \,\hat{}\, \overline{b}) = \pi$ була, ул вакытта $\overline{a}\overline{b} = 3 \cdot 1 \times \times \cos\pi = -3$.

в) әгәр $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$ булса, $(\bar{a} \,\hat{}\, \bar{b}) = 0$ була, димәк, $\bar{a}\bar{b} = 3 \cdot 4 \times$ $\times \cos 0 = 12$.

4.1. Скаляр тапкырлауның үзлекләре

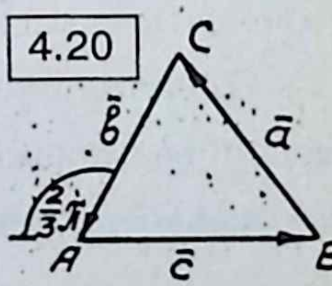
1. $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$ — тапкырлауның урын алыштыру — коммутативлык законы.

2. $(\lambda\bar{a}) \cdot \bar{b} = \lambda(\bar{a} \cdot \bar{b})$ — санлы тапкырлаучыга карата ассоциативлык законы.

3. $(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c}$ сумманың дистрибутивлык законы $\bar{a} \cdot \bar{a}$ тапкырчыгышы $\bar{a}$ *векторының скаляр квадраты* дип атала һәм $\bar{a}^2$ дип тамгалана. Скаляр тапкырлауның билгеләмәсе нәтиҗәсендә $\bar{a}^2 = \bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}| \cdot |\bar{a}| \cos(\bar{a}, \hat{}\, \bar{a}) = |\bar{a}|^2 \cos 0 = |\bar{a}|^2$, ягъни векторның скаляр квадраты аның модуленең квадратына тигез.

Мисаллар. а) әгәр $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$, $(\bar{a}, \hat{}\, \bar{b}) = 2\pi/3$ булса, $|\bar{a} + \bar{b}|$ ны исәпләгез.

Чишү. $|\bar{a} + \bar{b}|^2 = (\bar{a} + \bar{b})^2 = (\bar{a} + \bar{b})(\bar{a} + \bar{b}) = \bar{a}^2 + 2\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{b}^2 =$ $= |\bar{a}|^2 + 2|\bar{a}||\bar{b}| \cos(\bar{a}, \hat{}\, \bar{b}) + |\bar{b}|^2 = 9 + 2 \cdot 3 \cdot 4\left(-\frac{1}{2}\right) + 16 = 13$. Моннан $|\bar{a} + \bar{b}| = \sqrt{13}$.



б) Тигезьяклы ABC өчпочмагы бирелгән. Якларның озынлыгы 1 гә тигез. Әгәр $\overrightarrow{BC} = \bar{a}$, $\overrightarrow{CA} = \bar{b}$, $\overrightarrow{AB} = \bar{c}$ булса, $\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot \bar{c}$ ны исәпләргә.

Чишү. $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = 0$, $|\bar{a}| = |\bar{b}| = |\bar{c}| = 1$, $(\bar{a}, \hat{}\, \bar{b}) = (\bar{a}, \hat{}\, \bar{c}) = (\bar{b}, \hat{}\, \bar{c}) = \frac{2\pi}{3}$ (4.20 рәс.). (Мәсәлән, ни өчен $(\bar{a}, \hat{}\, \bar{b}) \neq \frac{\pi}{3}$?) Бу мәсьәләне ике юл белән чишәргә була.

Беренче юл. $\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{c} \cdot \bar{a} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cos(\bar{a}, \hat{}\, \bar{b}) + |\bar{b}| \times$ $\times |\bar{c}| \cos(\bar{b}, \hat{}\, \bar{c}) + |\bar{c}| \cdot |\bar{a}| \cos(\bar{c}, \hat{}\, \bar{a}) = 1 \cdot 1\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \cdot 1\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \cdot 1\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$.

Икенче юл. $\left(\bar a + \bar b + \bar c\right)^2 = \bar 0^2 \Leftrightarrow \bar a^2 + \bar b^2 + \bar c^2 + 2\left(\bar a \bar b\right) +$
$+ 2(\bar a, \bar c) + 2(\bar c \cdot \bar a) = 0 \Leftrightarrow |\bar a|^2 + |\bar b|^2 + |\bar c|^2 + 2\left(\bar a \cdot \bar b + \bar b \cdot \bar c + \bar c \cdot \bar a\right) =$
$= 0 \Leftrightarrow 3 + 2\left(\bar a \cdot \bar b + \bar b \cdot \bar c + \bar a \cdot \bar c\right) = 0 \Leftrightarrow \bar a \cdot \bar b + \bar b \cdot \bar c + \bar c \cdot \bar a = -\frac{3}{2}.$

4.2. Төп бәйләнешләр

$\bar a$ векторының *u* күчәренә проекциясенә охшаш рәвештә, $\bar a$ векторының $\bar b$ векторы юнәлешенә проекциясе $\Pi p_{\bar b}\bar a = |\bar a| \cos(\bar a, \hat{\ } \bar b)$ га тигез, шулай ук $\Pi p_{\bar a}\bar b = |\bar b| \cos(\bar a, \hat{\ } \bar b)$. Ул вакытта $\bar a \cdot \bar b =$ $= |\bar a| \cdot |\bar b| \cos(\bar a, \bar b) = |\bar a| \Pi p_{\bar a}\bar b = |\bar b| \Pi p_{\bar b}\bar a$ скаляр тапкырчыгышыннан мондый нәтиҗә килеп чыга:

$$\Pi p_{\bar b}\bar a = \frac{\bar a \cdot \bar b}{|\bar b|}, \qquad \Pi p_{\bar a}\bar b = \frac{\bar a \cdot \bar b}{|\bar a|}.$$

Мисал. Әгәр $|\bar a| = 3$, $|\bar b| = 4$, $(\bar a, \hat{\ } \bar b) = \frac{\pi}{3}$ булса, $\Pi p_{\bar a}\left(\bar a + \bar b\right)$ ны исәпләргә.

Чишү. Әгәр $\bar a + \bar b = \bar c$ дип алсак, ул вакытта

$$\Pi p_{\bar a}\vec c = \frac{\bar a \cdot \bar c}{|\bar a|} = \frac{\bar a\left(\bar a + \bar b\right)}{|\bar a|} = \frac{\bar a^2 + \bar a \cdot \bar b}{|\bar a|} = \frac{3^2 + 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}}{3} = \frac{9+6}{3} = 5.$$

Искәрмә. $\bar a \cdot \bar e = |\bar a||\bar e| \cos(\bar a \hat{\ } \cdot \bar e) = |\bar a| \cdot 1 \cdot \cos(\bar a \hat{\ } \cdot \bar e) = \Pi p_{\bar e}\bar a$, ягъни векторның ортка скаляр тапкырчыгышы бу векторның орт юнәлешенә булган проекциясенә тигез. $\bar a$ һәм $\bar b$ векторларының перпендикуляр булулары өчен $(\bar a \cdot \bar b) = 0$ булуы кирәк һәм ул җитә дә (исбат итегез).

Мисал. Әгәр $\bar m \perp \bar n$ һәм $|\bar m| = |\bar n| = 1$ булса, $\bar a = 3\vec m - 4\vec n$ векторының озынлыгын табыгыз.

Чишү. $|\bar a|^2 = \bar a^2 = (3\bar m - 4\bar n)^2 = 9\bar m^2 - 24\bar m \cdot \bar n + 16\bar n^2 =$
$= 9 + 16 = 25$, чөнки $\left(\vec m \cdot \vec n\right) = 0$. Димәк, $|a| = 5$.

Скаляр тапкырчыгыш билгеләмәсен кулланып табабыз:

$$\cos(\vec{a} \, \widehat{\ } \, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Мисал. Әгәр $\overline{p} = \overline{m} + 2\overline{n}$, $\overline{q} = 5\overline{m} - 4\overline{n}$, $\overline{p} \perp \overline{q}$, $|\overline{m}| = |\overline{n}| = 1$ булса, $(\vec{m}, \vec{n})$ ны исәпләгез.

Чишү. $\overline{p} \perp \overline{q}$ булганлыктан, $\overline{p} \cdot \overline{q} = 0$ була, димәк,

$0 = (\overline{m} + 2\overline{n})(5\overline{m} - 4\overline{n}) = 5\overline{m}^2 + 6(\overline{m} \cdot \overline{n}) - 8\overline{n}^2 \Leftrightarrow 5 \cdot 1 + 6(\overline{m} \cdot \overline{n}) -$

$-8 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow (\overline{m}, \overline{n}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(\overline{m} \, \widehat{,} \, \overline{n}) = \frac{\overline{m} \cdot \overline{n}}{|\overline{m}||\overline{n}|} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\overline{m} \, \widehat{,} \, \overline{n}) = \frac{\pi}{3}.$

Ни өчен $(\overline{m}, \overline{n}) \neq \frac{5\pi}{3}$?

Әгәр $\overline{a}$ һәм $\overline{b}$ векторлары нормальләштерелгән $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ базисында үзенең координатлары $\overline{a} = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$, $\overline{b} = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ белән бирелсә: $\overline{a} \cdot \overline{b} = \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3$ тизлеге үтәлә. Моннан табабыз:

а) a һәм b векторларының ортогональ булулары өчен $\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3 = 0$ булу кирәк һәм шул җитә дә.

б) $|\overline{a}| = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}$; $|\overline{b}| = \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2}$

в) $\cos(\overline{a} \, \widehat{\ } \, \overline{b})$ өчен формула:

$$\cos(\overline{a} \, \widehat{\ } \, \overline{b}) = \frac{\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} \, \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2}}.$$

Бу формуланың ортогональ базиста гына дөрес булуын аерым искәртәбез!

Мисаллар. а) $\overline{m}, \overline{n}, \overline{p}$ базис векторлары үзара $\frac{\pi}{3}$ зурлыктагы почмаклар төзиләр һәм $|\overline{m}| = 4$, $|\overline{n}| = 2$, $|\overline{p}| = 6$. Әгәр бу базиста $\overline{a}$ векторының координатлары 1, – 1,2 булса, аның озынлыгын табыгыз.

Чишү. Бу базиста $\overline{a}$ түбәндәгечә таркала:

$\vec{a} = \vec{m} - \vec{n} + 2\vec{p} \Rightarrow \bar{\bar{a}}^2 = (\vec{m} - \vec{n} - 2\vec{p})^2 = \overline{m}^2 + \overline{n}^2 + 4\overline{p}^2 -$

$$-2\overline{m}\cdot\overline{n}+4\overline{m}\,\overline{p}-4\overline{n}\,\overline{p}=\left|\overline{m}\right|^2+\left|\overline{n}\right|^2+4\left|\overline{p}\right|^2-2\left|\overline{m}\right|\left|\overline{n}\right|\times$$

$$\times\cos(\overline{m},\,\widehat{\ }\,\overline{n})+4\left|\overline{m}\right|\left|\overline{p}\right|\cos(\overline{m},\,\widehat{\ }\,\overline{p})-4\left|\overline{n}\right|\left|\overline{p}\right|\cos(\overline{n},\,\widehat{\ }\,\overline{p})=$$

$$=16+4+4\cdot 36-2\cdot 4\cdot 2\cdot\frac{1}{2}+4\cdot 4\cdot 6\cdot\frac{1}{2}-4\cdot 2\cdot 6\cdot\frac{1}{2}=160\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left|\overline{a}\right|=\sqrt{160}=4\sqrt{10}.$$

Бу мисалны эшләгәндә $\left|\overline{a}\right|=\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}$ формуласын куллансак, координатларның квадратлар суммасы алтыга тигез булыр һәм җавап ялгыш булыр иде.

б) Өч вектор бирелгән: $\overline{a}=\{5;\,-6;\,1\}$, $\overline{b}=\{-4;\,3;\,0\}$, $\overline{c}=\{5;\,-8;\,10\}$, $3\overline{a}^2-4\overline{a}\,\overline{b}+2\overline{c}^2$ ны исәпләгез.

Чишү. Символик язу күрсәткәнчә, бу векторлар нормальләштерелгән базиста бирелгән, шуның өчен $\vec{a}^2=5^2+6^2+1=62$, $\vec{c}^2=25+64+100=189$; $\vec{a}\vec{b}=5(-4)-6\cdot 3+1\cdot 0=-38$, моннан $3\vec{a}-4\vec{a}\vec{b}+2\vec{c}^2=3\cdot 62-4(-38)+2\cdot 189=716$.

в) Әгәр $\overline{a}=\{-8;\,4;\,1\}$ булса, $\overline{a}$ векторына капма-каршы булган ортны табыгыз.

Чишү. Орт $\overline{a}_0=\frac{1}{\left|\overline{a}\right|}\overline{a}$, ә инде $\left|\overline{a}\right|=\sqrt{64+16+1}=9$ булганлыктан, $\overline{a}_0=\left\{-\frac{8}{9};\,\frac{4}{9};\,\frac{1}{9}\right\}$. Табылган орт $\overline{a}_0\uparrow\uparrow\overline{a}$, шуның өчен эзләнгән вектор — $\overline{a}_0=\left\{\frac{8}{9};\,-\frac{4}{9};\,-\frac{1}{9}\right\}$ була.

г) Әгәр $\vec{a}=\{8;\,4;\,1\}$, $\vec{b}=\{2;\,-2;\,1\}$ булса, $Пр_{\vec{b}}\vec{a}$ ны табыгыз.

Чишү. $Пр_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{b}\right|}=\frac{8\cdot 2+4(-2)+1\cdot 1}{\sqrt{2^2+2^2+1}}=\frac{9}{3}=3.$

Нормальләштерелгән базиста векторның координатлары аның орт юнәлешләренә булган проекцияләренә тиндәш. Чыннан да, $\overline{a}=\lambda_1\overline{i}+\lambda_2\overline{j}+\lambda_3\overline{k}$ булсын. $\overline{a}\cdot\overline{i}$ ны карыйк. $\overline{i}$ орт булганлыктан, $\overline{a}\cdot\overline{i}=Пр_{\overline{i}}\overline{a}$, ә икенче яктан $\overline{a}\,\overline{i}=\left(\lambda_1\overline{i}+\lambda_2\overline{j}+\lambda_3\overline{k}\right)\overline{i}=\lambda_1$, ягъни $Пр_{\overline{i}}\overline{a}=\lambda_1$, аналогик рәвештә $Пр_{\overline{j}}\overline{a}=\lambda_2$, $Пр_{\overline{k}}\overline{a}=\lambda_3$.

Мисал. Әгәр $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$, $|\vec{c}| = 14$, $(\widehat{\vec{c}, \vec{k}}) > \frac{\pi}{2}$ булса, $\vec{c}$ векторын табыгыз, биредә: $\vec{a} = \{3; 2; 2\}$, $\vec{b} = \{18; -22; -5\}$.

Чишү. $\vec{c} = \{x; y; z\}$ булсын, ортогональлек шартын һәм $|\vec{c}| = 14$ икәнен кулланып табабыз:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 0; \\ 18x - 22y - 5z = 0; \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 14 \end{cases}$$

Беренче ике тигезләмәдән x һәм y ны z аша табабыз:

$$x = -\frac{z}{3}, \qquad y = -\frac{z}{2}.$$

Табылган x һәм y ны өченче тигезләмәгә куябыз:

$$\sqrt{\frac{z^2}{9} + \frac{z^2}{4} + z^2} = 14 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{49}{36} z^2} = 14 \Leftrightarrow \frac{7}{6}|z| = 14, \quad |z| = 12.$$

$\vec{c}$ һәм $\vec{k}$ арасындагы почмак җәенке булганлыктан, $Пр_{\vec{k}}\vec{c} < 0$, димәк, $z = -12$.

Моннан x һәм y ны табабыз: $\vec{c} = \{4; 6; -12\}$.

Күнегүләр

1. $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 2\pi/3$. а) $(\vec{a} - \vec{b})^2$, б) $(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})$ ны исәпләгез.

2. Әгәр $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{q}| = 3$, $(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \pi/4$ булса, $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$ векторлары белән параллелограммның диагональләре озынлыгын исәпләгез.

3. Әгәр $\vec{a} = 10\vec{m} + 2\vec{n}$, $\vec{b} = 5\vec{m} - 12\vec{n}$ булса, $Пр_{\vec{b}}\vec{a}$ ны табыгыз, биредә $\vec{m} \perp \vec{n}$, $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$.

4. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлары $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ шартын канәгатьләндерәләр, биредә $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 4$. $(\vec{a}\vec{b}) + (\vec{b}\vec{c}) + (\vec{c} \cdot \vec{a})$ ны исәпләгез.

5. Әгәр $\overline{a} = \{3;\ 5;\ 7\}$, $\overline{b} = \{-2;\ 6;\ 1\}$ булса, $a \cdot b$ ны исәпләгез.

6. Әгәр $\overline{a} = \{8;\ 4;\ 1\}$, $\overline{b} = \{2;\ -2;\ 1\}$ булса, $\cos(\overline{a}, \widehat{\ }\ \overline{b})$ ны исәпләгез.

7. Әгәр $\overline{a} = \{4;\ -2;\ -4\}$, $\overline{b} = \{6;\ -3;\ 2\}$ булса, $\left(2\overline{a} - 3\overline{b}\right) \times \times \left(\overline{a} + 2\overline{b}\right)$ исәпләгез.

8. $\overline{a} = \{2;\ 1;\ -1\}$ векторына коллинеар һәм $\overline{a} \cdot \overline{b} = 3$ шартын канәгатьләндерә торган $\vec{b}$ векторын табыгыз.

9. Әгәр $\overline{c}\left(2\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}\right) = -6$ булса, $\overline{a} = \{2;\ 3;\ -1\}$ һәм $\overline{b} = \{1; -2; 3\}$ векторларына перпендикуляр булган $\vec{c}$ векторын табыгыз.

10. Әгәр $\overline{a} = \{3;\ -6;\ 1\}$, $\overline{b} = \{1;\ 4;\ -5\}$, $\overline{c} = \{-3;\ -4;\ 12\}$ булса, $Пр_{\overline{c}}\left(\overline{a} + \overline{b}\right)$ не исәпләгез.

11. $\overline{a} = \{-3;\ 0;\ 4\}$, $\overline{b} = \{5;\ -2;\ -14\}$ векторлары арасындагы почмак биссектрисасының ортын табыгыз.

12. α нинди булганда $\overline{a} = \{\alpha;\ -3;\ 2\}$ һәм $\overline{b} = \{1;\ 2;\ -\alpha\}$ векторлары ортогональ булалар?

Җаваплар

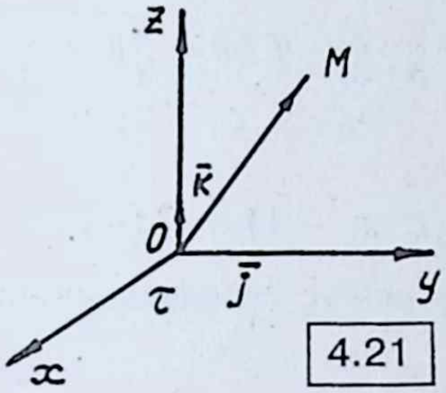
1. а) 37; б) −61. 2. $\left|\overline{a} + \overline{b}\right| = 15;$ $\left|\overline{a} - \overline{b}\right| = \sqrt{593}$.
3. 2. 4. −13. 5. 31. 6. 1/3 7. −200.
8. $\overline{b} = \left\{1;\ \frac{1}{2};\ -\frac{1}{2}\right\}$. 9. $\overline{c} = \{-3;\ 3;\ 3\}$.
10. −4. 11. $\overline{e} = \left\{-\frac{2}{\sqrt{6}};\ \frac{1}{\sqrt{6}};\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$. 12. $\alpha = -6$.

5. ТУРЫПОЧМАКЛЫ КООРДИНАТЛАР СИСТЕМАСЫ ҺӘМ РАДИУС-ВЕКТОР

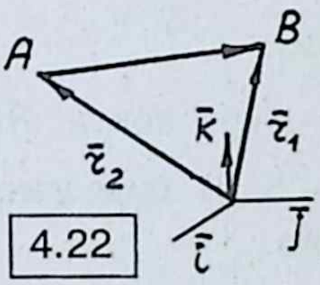
Үзара перпендикуляр булган өч берәмлек векторы $\left(\overline{i},\ \overline{j},\ \overline{k}\right)$ һәм координатлар башлангычы дип аталган O ноктасы бирелсен (4.21 рәс.), $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ векторларының юнәлеше координатлар күчәре юнәлешлә-

ренә тәңгәл килә. $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ базисына бәйләнешле рәвештә табылган $\overrightarrow{OM}$ векторының координатлары теләсә нинди M ноктасының турыпочмаклы координатлары дип атала. $\overrightarrow{OM}$ векторы M ноктасының радиус-векторы дип атала.

Әгәр M ноктасының координатлары x, y, z булса, аны $M(x, y, z)$ дип язалар һәм, билгеләмә буенча, $\overrightarrow{OM} = \{x, y, z\}$.



4.21



4.22

Мисал. $A(3, -1, 2)$, $B(-1, 2, 1)$ нокталары бирелсен. $\overrightarrow{AB}$ векторының координатларын табарга.

Чишү. Ике вектор аермасының һәр координатасы бу векторларның тиңдәш координатлары аермасына тигез: $\bar{a} - \bar{b} = \{x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2\}$ икәнен искә төшерик. Әйтик, $\vec{r}_2 = \{3; -1; 2\}$ һәм $\vec{r}_1 = \{-1; 2; 1\}$ A һәм B нокталарының әлеге координаталар системасындагы радиус векторлары.

4.22 рәсемендә күренгәнчә, $\overrightarrow{AB} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \{-1 - 3; 2 + 1; 1 - 2\} = \{-4; 3; -1\}$.

Әгәр $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ нокталары бирелсә, $\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ һәм $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

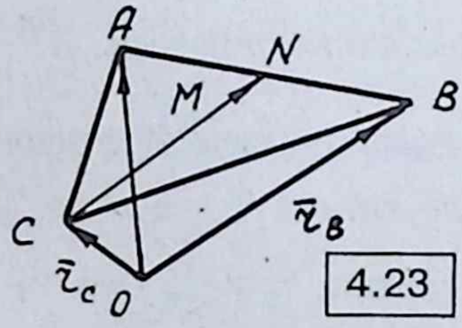
Бу AB кисемтәсенең озынлыгы була.

Мисаллар. а) өч нокта, $A(-2, -4, 4)$, $B(-4, 2, 0)$, $C(3, -2, 1)$ бирелгән. Өчпочмакның C түбәсеннән медианалар кисешкән. M ноктасына кадәр булган ераклыкны табыгыз (4.23 рәс.).

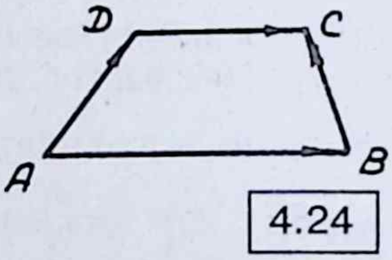
Чишү. N AB ягының уртасы, моннан $|\overrightarrow{CM}| = \frac{2}{3}|\overrightarrow{CN}|$. Димәк, эзләнгән ераклык $\overrightarrow{CM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CN}$ векторының абсолют зурлыгына тигез.

Әйтик, $\bar{r}_A, \bar{r}_B, \bar{r}_C$ A, B, C нокталарының радиус-векторлары, ягъни $\bar{r}_A = \{-2;\ -4;\ 4\}$, $\bar{r}_B = \{-4;\ 2;\ 0\}$, $\bar{r}_C = \{3;\ -2;\ 1\}$. Моннан: $\overrightarrow{CB} = \bar{r}_B - \bar{r}_C = \{-7;\ 4;\ -1\}$; $\overrightarrow{BA} = \bar{r}_A - \bar{r}_B = \{2;\ -6;\ 4\}$ $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \{-6;\ 1;\ 1\}$ $\overrightarrow{CM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CN} = \left\{-4;\ \frac{2}{3};\ \frac{2}{3}\right\}$; $|\overrightarrow{CM}| = \sqrt{16 + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{38}$.

б) Дүрт нокта $A(3,\ -1,\ 2)$, $B(1,\ 2,\ -1)$, $C(-1,\ 1,\ -3)$, $D(3,\ -5,\ 3)$ бирелгән. Аларның трапециянең түбәләре икәнен исбатларга.



4.23



4.24

Чишү. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ векторларының координатларын исәплик: $\overrightarrow{AB} = \{-2;\ 3;\ -3\}$, $\overrightarrow{DC} = \{-4;\ 6;\ -6\}$, $\overrightarrow{AD} = \{0;\ -4;\ 1\}$, $\overrightarrow{BC} = \{-2;\ -1;\ -2\}$.

Моннан күренгәнчә, $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD} \nparallel \overrightarrow{BC}$ ягъни $ABCD$ трапеция була (4.24 рәс.).

Күнегүләр

1. Әгәр $\bar{a} = \{3;\ -1;\ 4\}$ векторының башлангычы $M(1,\ 2,\ -3)$ ноктасы белән тәңгәл килсә, аның ахыргы N ноктасын табыгыз.

2. $A(-1,\ 3,\ -7)$, $B(2,\ -1,\ 5)$ ноктасы бирелгән, $\sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$ ны исәплэгез.

3. Өчпочмакның түбәләре бирелгән: $A(-1,\ -2,\ 4)$, $B(-4,\ -2,\ 0)$, $C(3,\ -2,\ 1)$. B түбәсендәге эчке почмакның зурлыгын исәпләгез.

4. $M(-5,\ 7,\ -6)$, $N(7,\ -9,\ 9)$ һәм нокталары $\overline{a} = \{1,\ -3,\ 1\}$ векторы бирелгән. $Пр_{\overrightarrow{MN}}\ \overline{a}$ исәпләгез.

Җаваплар

1. $N(4,\ 1,\ 1)$. 2. 13. 3. $\pi/4$. 4. 3.

СТЕРЕОМЕТРИЯДӘН МӘСЬӘЛӘЛӘР

Стереометрия мәсьәләләрен чишү сызым төзүдән башлана. Сызым аңлаешлы итеп, җиренә җиткереп эшләнергә тиеш. Сызым сызганда мәсьәләнең шартына анализ ясала. Геометрик фигураларның аерым элементларының бер-берсенә карата урнашулары һәм үзара бәйләнешләре аныклана. Сызымны сызу геометрик фигураларның үзлекләрен һәм ул үзлекләрне практикада куллана белүне таләп итә.

Кайбер очракта мәсьәлә чишүнең башлангыч этабы, мәсәлән, яссылык белән туры арасындагы почмакны төзегәндә, икекырлы почмакның сызыкча почмагын төзегәндә, кисемне төзегәндә, күпкырлык һәм шарның комбинациясен сурәтләгәндә һ. б. ш. шактый кыенлыклар тудыра.

Стереометрия мәсьәләсе чишүнең икенче этабы булып, ул мәсьәләне бер яки берничә планиметрия мәсьәләсенә кайтарып калдыру процессы тора. Планиметрия мәсьәләләре тезмәсен төзегәндә һәм аларны чишкәндә, төп сызым белән беррәттән, кайбер кисемнәр һәм аерым яссы детальләрнең сызымнарын төзергә киңәш ителә. Бу өстәмә сызымнар геометрик фигураның аерым элементларын яхшырак аңларга һәм стереометрия сызымының җитәрлек ачык булмавыннан килеп чыккан хаталардан сакланырга мөмкинлек бирәләр.

Табылган җавапны түбәндәге юнәлештә тикшерергә һәм анализ ясарга киңәш итәбез:

Беренчедән, җаваптагы үлчәмлекне тикшерү кирәк, чөнки рәвеш үзгәрткәндә, игътибарсызлык яки ваемсызлык аркасында очраклы хаталар килеп чыгуы бар, мәсәлән, мәйдан — сызыкча берәмлек, ә күләм квадрат берәмлектә күрсәтелә. Икенчедән, барлык геометрик характеристикалар уңай булганлыктан, бу зурлыкның мөмкин табылган кыйммәтләре өчен исәпләү формулаларының мәгънәсе булырга тиеш. Шунлыктан, табылган җавапның тамгасын тикшерергә кирәк.

Өченчедән, чикләмәләр булган яки аерым очракларны тикшерергә һәм аларга тиешле геометрик интерпретация бирергә кирәк.

1. КҮПКЫРЛЫКЛАР

1.1. ПРИЗМА

Ике кыры параллель яссылыкларда яткан *n*-почмаклар, ә калган *n* кыры параллелограммнар булган күпкырлык n-почмаклы *призма* дип атала. 5.1 рәсемдә $ABCDE$ һәм $A_1B_1C_1D_1E_1$ — үзара тигез күппочмаклар, AA_1 B_1B, BB_1C_1C һ. б. кырлар — параллелограммнар. Тигез күппочмаклар призманың нигезләре, ә параллелограммнар — ян кырлар дип аталалар. Призма кырларының якларын кабыргалар, ә кабырганың очларын призманың түбәләре дип атыйлар. Ян кабыргалар дип призманың нигезләрендә ятмаган кабыргалар атала. 5.1 рәсемдә AA_1, BB_1 һ. б. ш. — ян кабыргалар, A, B, C һ. б. ш. — призманың түбәләре.

Призмалар туры һәм авыш булырга мөмкин. Ян кабыргалары нигез яссылыкларына перпендикуляр булган призма туры призма, киресенчә булса, авыш призма дип атала. Туры призманың ян кырлары — турыпочмаклыклар.

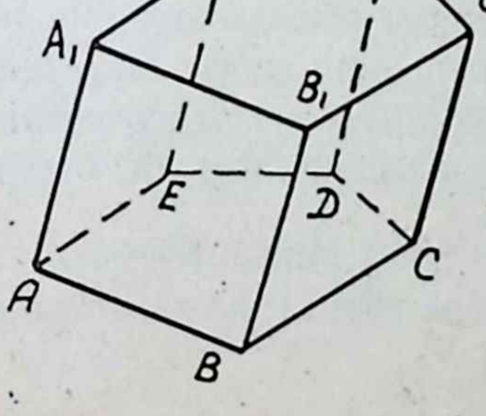
Нигезендә төзек күппочмак булган туры призма *төзек призма* дип атала.

Өске нигезенең теләсә нинди ноктасыннан аскы нигезгә төшерелгән перпендикуляр кисемтәсе призманың биеклеге дип атала. Туры призманың биеклеге ян кабырга озынлыгына тигез була.

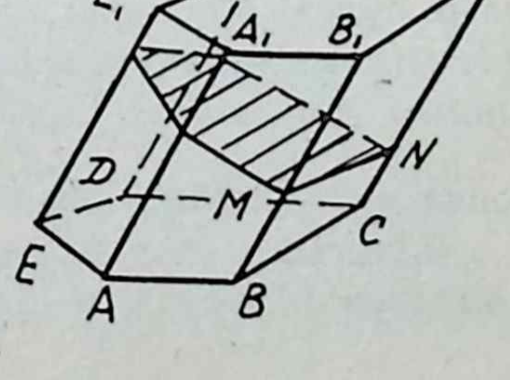
Призманың нигезендә өчпочмак, дүртпочмак һ. б. ш. булуга карап, призмалар өчпочмаклы, дүртпочмаклы һ. б. ш. призмалар дип аталалар.

Призманың ян кабыргасына перпендикуляр итеп үткәргән яссылык белән призманың кисешүе нәтиҗәсендә хасил булган күппочмаклы кисем призманың перпендикуляр кисеме дип атала (5.2 рәс.). Перпендикуляр кисемнең яклары тиңдәшле ян кырларның биеклеге булып торалар, мәсәлән, 5.2 рәсемендә кисемтәсе BB_1C_1C ян кырының биеклеге була. Туры призма өчен перпендикуляр кисем булып нигездә яткан күппочмаклар хезмәт итә.

5.1



5.2



Призманың ян өслеге мәйданы аның ян кырлары мәйданнарының суммасына тигез һәм түбәндәге формула белән исәпләнергә мөмкин:

$$S_{ян} = pl,$$

биредә p — перпендикуляр кисемнең периметры, l— ян кабырга озынлыгы.

Туры призма өчен p — нигезнең периметры.

Призманың тулы өслек мәйданы ике нигез мәйданы белән ян өслек мәйданының суммасына тигез.

Призманың күләме түбәндәге формула белән исәпләнә:

$$V = S \cdot l,$$

биредә S — перпендикуляр кисем мәйданы, l — ян кабырганың озынлыгы.

Күләмне икенче формула белән дә исәпләргә мөмкин:

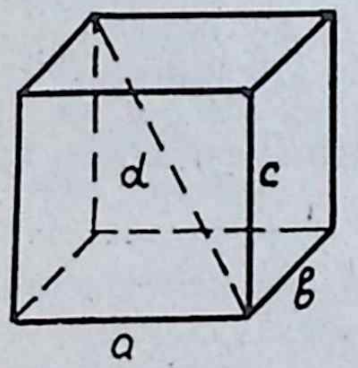
$$V = SH,$$

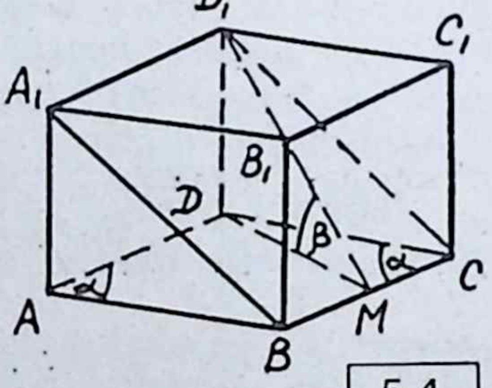
биредә S — нигез мәйданы, H — биеклек озынлыгы.

Туры призма өчен $S_п = S$ һәм $H = l$.

Нигезендә параллелограмм яткан призма параллелепипед дип атала. Димәк, параллелепипедның капма-каршы ятучы һәр ике кыры конгруэнт һәм параллельләр, параллелепипедның барлык дүрт диагонале бер ноктада кисешәләр һәм шул ноктада урталай бүленәләр.

5.3





5.4

Параллелепипедның ян кабыргалары нигез яссылыгына перпендикуляр булса, ул *туры параллелепипед* дип атала. Нигезендә турыпочмаклык яткан туры параллелепипед *турыпочмаклы параллелепипед* дип атала. Турыпочмаклы параллелепипедның барлык диагональләре дә тигез һәм $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, биредә d — диагональ озынлыгы; a, $в$, c — бер түбәдән чыга торган өч кабырганың озынлыклары (5.3 рәс.).

Турыпочмаклы параллелепипедның күләмен

$$V = a \cdot b \cdot c$$

формуласы белән исәпләргә була.

Кырлары квадрат булган турыпочмаклы параллелепипед *куб* дип атала.

Беренче мәсьәлә. Туры призманың нигезендә кысынкы почмагы α га тигез булган ромб ята. Нигезләрнең капма-каршы яклары аша яссылык үткәрелгән. Бу яссылык кисеменең мәйданы S һәм ул нигез яссылыгы белән β га тигез булган почмак төзи. Призманың күләмен табыгыз.

Чишү. Мәсьәләнең шартыннан $ABCD$ — ромб, $|AB| = |BC| = |CD| = |AD|$. $B\hat{C}D = B\hat{A}D = \alpha$. Ян кабыргалар нигез яссылыгына перпендикуляр булып торалар (5.4 рәс.). BCD_1A_1 кисеме — параллелограмм, чөнки $BC \parallel A_1D_1$ һәм $|BC| = |A_1D_1|$, бу параллелограммның мәйданы S. $ABCD$ нигез һәм BCD_1A_1 кисем яссылыклары арасындагы икекырлы почмакка тиңдәш итеп сызыкча почмак төзү өчен DD_1 кабыргасы аша BC кабыргасына перпендикуляр итеп яссылык үткәрәбез (5.4 рәс.). DMD_1 сызыкча почмагының зурлыгы β га тигез. Төзү буенча DM — $ABCD$ ромбының биеклеге, D_1M BCD_1A_1 кисемнең биеклеге була.

Мәсьәләне чишү өчен нигез ягының озынлыгын табу кирәк, чөнки бу очракта призманың биеклеге $|DD_1|$ не табу җиңел. Нигез ягының озынлыгын табу өчен, якның озынлыгы билгеле дип алып, кисемнең мәйданын исәплибез.

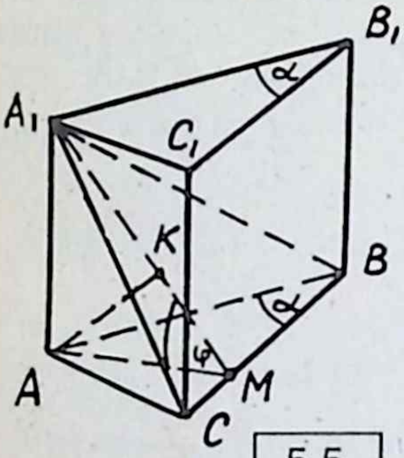
$|BC| = a$ дип алсак, MDC өчпочмагыннан: $|DM| = |DC| \sin\alpha = a\sin\alpha$, $\triangle MDD_1$ дән $|MD_1| = \frac{|DM|}{\cos\beta} = \frac{a\sin\alpha}{\cos\beta}$, ниһаять, BCD_1A_1 кисеме мәйданы: $S = |BC| \cdot |D_1M| = a\frac{a\sin\alpha}{\cos\beta}$ формуласын кулланып исәпләнә. Моннан билгесез a ны табабыз: $a = \sqrt{\frac{S\cos\beta}{\sin\alpha}}$. Призманың нигез мәйданы $S_H = a^2\sin\alpha = S\cos\beta$ га тигез, $\triangle MDD_1$ дән призманың биеклеген табабыз:

$$|DD_1| = |DM|\,\mathrm{tg}\beta = a\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta = \sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta\sqrt{\frac{S\cos\beta}{\sin\alpha}}.$$

Призманың күләме $V = S_H|DD_1| = S\cos\beta\sin\alpha\,\mathrm{tg}\beta\sqrt{\frac{S\cos\beta}{\sin\alpha}}$.

Җавап. $V = S\cos\beta\sqrt{S\sin\alpha\cos\beta}$.

Искәрмә. Призманың нигез мәйданын башта ук $S_H = S\cos\beta$ формуласы белән язарга була иде, чөнки призманың нигезе — BCD_1A_1 кисеменең ортогональ проекциясе (5.4 рәс.) биредә S — кисем мәйданы, β — нигез һәм кисем яссылыклары арасындагы почмак зурлыгы.



5.5

Икенче мәсьәлә. $ABCA_1B_1C_1$ туры призмасының нигезендә тигезьянлы өчпочмак ята. Бу өчпочмакта $A\hat{B}C = \alpha$, $|AB| = |BC| = a$ икәне бирелгән. Призманың биеклеге H ка тигез. BC кабыргасы һәм A_1 түбәсе аша яссылык үткәрелгән. A түбәсеннән бу яссылыкка кадәр ераклыкны табыгыз (5.5 рәс.).

Чишү. Мәсьәләнең шарты буенча ян кабыргаларның озынлыгы H ка тигез. A ноктасыннан A_1BC кисеменә кадәр булган ераклык A ноктасыннан бу кисемгә төшерелгән перпендикуляр озынлыгына тигез (5.5 рәс.). Бу перпендикуляр A ноктасыннан A_1BC кисеменә перпендикуляр итеп үткәргән яссылыкта ята. AA_1 ян кабыргасы аша BC кабыргасына перпендикуляр итеп яссылык үткәрәбез (моның булуы мөмкин, чөнки AA_1 кабыргасы нигез яссылыгына перпендикуляр һәм, димәк, BC кабыргасына да перпендикуляр була). Яссылыклар кисемендә AMA_1 сызыкча почмагын табабыз, ә эзләгән ераклык $|AK|$ га тигез, биредә AK кисемтәсе A_1M га перпендикуляр.

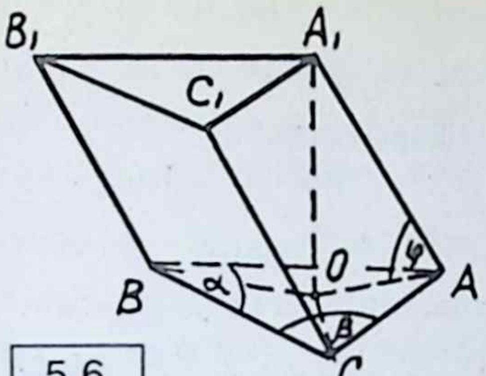
Турыпочмаклы $\triangle AMB$ дан $|AM| = |AB|\sin\alpha = a\sin\alpha$: $|AK|$ ны табу өчен AMA_1 ярдәмче почмагын кертәбез. Әйтик, $A\hat{M}A_1 = \varphi$, ул вакытта турыпочмаклы $\triangle AMA_1$ дә табабыз: $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{|AA_1|}{|AM|} = \dfrac{H}{a\sin\alpha}$, ә эзли торган $|AK|$ ераклыгын $\triangle AMK$ дан табабыз. $|AK| = |AM|\sin\varphi$.

$\varphi \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ булганлыктан, $\sin\varphi = \dfrac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \dfrac{H}{a\sin\alpha\sqrt{1+\frac{H^2}{a^2\sin^2\alpha}}} = \dfrac{H}{\sqrt{a^2\sin^2\alpha+H^2}}$.

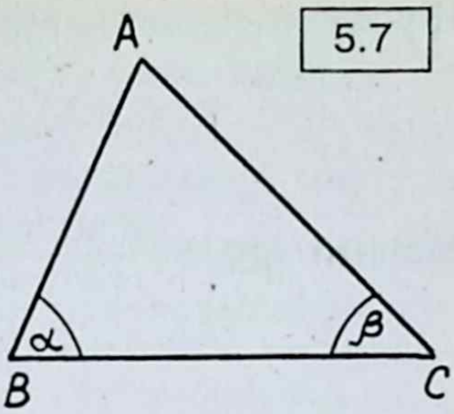
$$AK = a\sin\alpha\frac{H}{\sqrt{a^2\sin^2\alpha+H^2}}.$$

Җавап. $\dfrac{aH\sin\alpha}{\sqrt{a^2\sin^2\alpha+H^2}}$.

Өченче мәсьәлә. $ABCA_1B_1C_1$ авыш призманың нигезендә ятучы ABC өчпочмагының BC ягы a га тигез, аның янында ятучы почмак-



5.6



5.7

лар тиңдәш рәвештә α һәм β га тигез. Әгәр призманың күләме V һәм $|AA_1| = |A_1B| = |A_1C|$ булса, ян кабырга һәм нигез яссылыгы арасындагы почмакны табыгыз (5.6 рәс.).

Чишү. Мәсьәләнең шарты буенча $|BC| = a$, $A\hat{B}C = \alpha$, $B\hat{C}A = \beta$ һәм A_1 түбәсе аскы нигезнең түбәләреннән тигез ераклыкта ята.

A_1 түбәсеннән призманың аскы нигезенә A_1O перпендикулярын төшерәбез. $|AO| = |BO| = |CO|$, чөнки алар тигез озынлыктагы AA_1, BA_1, CA_1 авышмаларының проекцияләре. Шулай булгач, O ноктасы — $\triangle ABC$ ны камаучы әйләнәнең үзәге, AA_1 кабыргасы һәм нигез яссылыгы арасындагы эзләнгән почмак $O\hat{A}A_1$ була.

Мәсьәләне "әйләнмә юл" белән эшлибез: эзләнелгән OAA_1 почмагын φ гә тигез дип алып, призманын күләмен табабыз. Моның өчен нигез мәйданын һәм биеклекне табу кирәк.

Призманың нигезе — ABC өчпочмагы (5.7 рәс.). Бу өчпочмакта $BC = a$, ә аның янында ятучы почмаклар $A\hat{B}C = \alpha$, $A\hat{C}B = \beta$; $B\hat{A}C = \pi - (\alpha + \beta)$ синуслар теоремасы буенча $\frac{|BC|}{\sin(\pi-\alpha-\beta)} = \frac{|AB|}{\sin\beta}$,

моннан $|AB| = \frac{|BC|\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

Өчпочмакның мәйданын $S = \frac{1}{2}|AB||BC|\sin\alpha$ формуласын кулланып табабыз: $S = \frac{a^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$.

Турыпочмаклы $\triangle OAA_1$ дән $|OA_1|$ биеклеген табабыз: $|OA_1| = |OA|tg\varphi$, биредә $|OA|$ — нигезне камаучы әйләнәнең радиусы.

Синуслар теоремасы буенча $\triangle ABC$ да: $\frac{|BC|}{\sin A} = 2R$ яки $\frac{a}{\sin(\alpha+\beta)} = 2|AO|$. Моннан $|OA| = \frac{a}{2\sin(\alpha+\beta)}$ һәм $|OA_1| = \frac{a\operatorname{tg}\varphi}{2\sin(\alpha+\beta)}$.

Шулай итеп, призманың күләме

$$V = S|OA_1| = \frac{a^2 \sin\alpha \sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)} \cdot \frac{a tg\varphi}{2\sin(\alpha+\beta)}.$$

Моннан $tg\varphi = \frac{4V\sin^2(\alpha+\beta)}{a^3 \sin\alpha \sin\beta}$.

Җавап. $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{4V\sin^2(\alpha+\beta)}{a^3 \sin\alpha \sin\beta}\right)$.

Үзлегеңнән эшләү өчен мәсьәләләр

1. Турыпочмаклы параллелепипед нигезенең диагонале d га тигез һәм ул нигез ягы белән α почмагын төзи. Аскы һәм өске нигезләрнең капма-каршы яклары аша яссылык үткәрелгән. Бу яссылык нигез белән β почмагын төзи. Параллелепипедның ян өслеген табыгыз.

2. Туры призманың нигезендә тигезьянлы ABC өчпочмагы ята. $|AB| = |BC| = a$ һәм $B\hat{A}C = \alpha$. AC ягы аша нигезгә $\varphi\left(\varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ почмагы белән авыш яссылык үткәрелгән. Әгәр кисемдә өчпочмак килеп чыгуы билгеле булса, бу кисемнең мәйданын табыгыз.

3. Туры призманың нигезендә тигезьянлы трапеция ята. Трапециянең нигезләре a һәм b $(a > b)$, кысынкы почмагы α га тигез. Өске трапециянең зур нигезе һәм аскы трапециянең кечкенә нигезе аша үткәрелгән яссылык призманың нигезе белән β почмагы төзи. Призманың күләмен табыгыз.

4. Кубның аскы нигезе ягы аша яссылык үткәрелгән. Бу яссылык кубның күләмен, аскы нигездән исәпләп, $m:n$ чагыштырмасында бүлә. Әгәр $m \leq n$ булса, бу яссылык белән нигез арасындагы почмакны табыгыз.

5. Әгәр призманың диагонале һәм ян кыры арасындагы почмак α, ә нигезнең ягы a булса, дүртпочмаклы төзек призманың күләмен табыгыз.

6. Авышма призманың нигезендә кысынкы почмагы 2α булган ромб ята. Бу түбә аша үтүче ян кабырга белән нигезнең яклары арасындагы кысынкы почмаклар β га тигез. Әгәр призманың күләме V һәм нигез диагональләре суммасы m га тигез булса, ян кабырганың озынлыгын табыгыз.

7. Туры призманың нигезендә почмаклары α һәм β, ә мәйданы S ка тигез булган өчпочмак ята. Өске нигезнең түбәсен аскы нигез-

не камаучы әйләнә үзәге белән тоташтыручы туры аскы нигез яссылыгы белән β почмагын төзи. Призманың күләмен табыгыз.

8. Туры призманың нигезендә кысынкы почмагы α га тигез булган параллелограмм ята. Призманың диагональләре нигез яссылыгы белән тиңдәш рәвештә β һәм $\gamma(\beta < \gamma)$ почмаклары төзиләр. Әгәр призманың биеклеге H булса, аның күләмен табыгыз.

9. Призманың нигезендә яклары a булган төзек өчпочмак ята. Озынлыгы b булган ян кабырга, нигезнең бу кабырганы кисүче яклары белән α һәм β почмакларын төзи. Призманың күләмен табыгыз.

10. Призманың нигезендә диагональләре тиңдәшле ян якларга перпендикуляр булган тигезьянлы трапеция ята. Трапециянең диагональләре арасында ян якка каршы ятучы почмак α га тигез. Өске нигезнең түбәсен аскы нигезне камаучы әйләнә үзәге белән тоташтыручы кисемтә l гә тигез һәм ул нигез яссылыгы белән β га тигез почмак төзи. Призманың күләмен табыгыз.

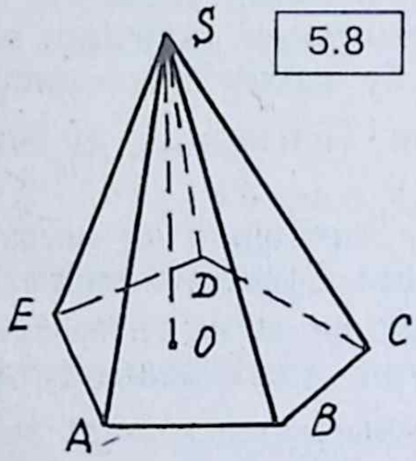
Җаваплар

1. $2d^2 \sin\alpha \operatorname{tg}\beta (\sin\alpha + \cos\alpha)$.
2. $\frac{a^2 \sin 2\alpha}{2\cos\varphi}$.
3. $\frac{1}{8}(a^2 - b^2)(a - b) \operatorname{tg}^2\alpha \operatorname{tg}\beta$.
4. $\operatorname{arctg} \frac{2m}{m+n}$.
5. $\frac{a^3\sqrt{\cos 2\alpha}}{\sin\alpha}$.
6. $\frac{4V \sin^2(\frac{\pi}{4}+\alpha)}{m^2 \sin\alpha\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}}$.
7. $S\operatorname{tg}\varphi\sqrt{\frac{S}{2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}}$.
8. $\frac{H^3}{4} \operatorname{tg}\alpha (\operatorname{ctg}^2\beta - \operatorname{ctg}^2\gamma)$.
9. $\frac{a^2 b}{4}\sqrt{3 - 4(\cos^2\beta - \cos\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha)}$.
10. $l^3 \sin 2\beta \cos\beta \sin\alpha \cos^2\frac{\alpha}{2}$.

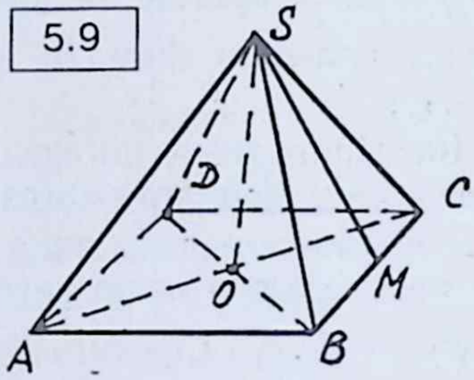
1.2. Пирамида

Бер кыры нинди дә булса күппочмак, калган кырлары уртак түбәле өчпочмакар булган күпкырлык *пирамида* дип атала (5.8 рәс.). $ABCDE$ күппочмагы — пирамиданың *нигезе* дип, калган

кырлары *ян кырлары* дип атала. Бу кырларның яклары — пирамиданың *кабыргалары* дип, ян кырларның яклары *ян кабыргалар* дип атала. 5.8 рәсемендә AS, BS, CS, DS, ES — пирамиданың ян кабыргалары. Барлык ян кырларның уртак түбәсе *пирамиданың түбәсе* дип атала. Бу түбәдән нигезгә төшерелгән перпендикуляр кисемтәсе *пирамиданың биеклеге* дип атала.



5.8



5.9

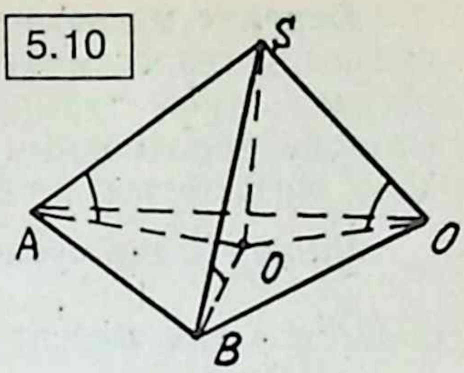
5.8 рәсемендә S — пирамиданың түбәсе, SO — биеклеге, O — биеклекнең нигезе. Әгәр пирамиданың нигезендә n почмак ятса, пирамида *n-почмаклы пирамида* дип атала. Пирамиданың тулы өслек мәйданы аның ян $S_{ян}$ һәм нигез $S_{н}$ өслеге мәйданнары суммасына тигез. Пирамиданың ян өслеге ян кырлар мәйданнары суммасына, ягъни өчпочмаклар мәйданнары суммасына тигез. Пирамиданың күләме $V = \frac{1}{3} S_{н} H$ формуласы буенча исәпләнә, монда $S_{н}$ — нигез мәйданы, H — пирамиданың биеклеге.

Әгәр пирамиданың нигезендә төзек күппочмак ятып, түбәсе бу күппочмакның үзәгенә проекцияләнсә, ул *төзек пирамида* дип атала. 5.9 рәсемендә пирамиданың нигезендә $ABCD$ квадраты ята, O биеклекнең нигезе квадратның үзәгенә тәңгәл килә, ягъни бирелгән пирамида — төзек дүртпочмаклы пирамида була. Төзек пирамиданың барлык ян кабыргалары конгруэнтлар, барлык ян кырлары — тигезьянлы конгруэнт өчпочмаклар. Төзек пирамида да ян кырның түбәдән үткәргән биеклеге бу пирамиданың *апофемасы* дип атала. 5.9 рәсемендә SM — апофема. Төзек пирамиданың ян өслеге мәйданын исәпләү өчен түбәндәге формула кулланыла:

$$S_{ян} = \frac{1}{2} pl,$$

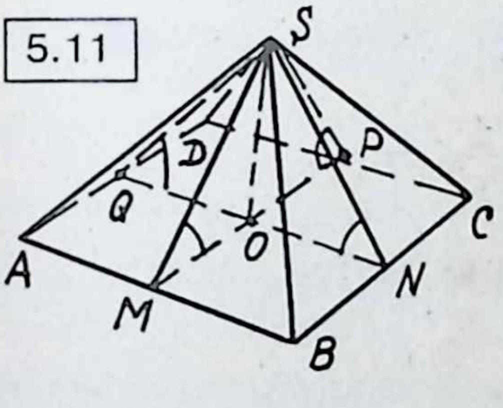
биредә p — нигез периметры, l — төзек пирамиданың апофемасы. Бу формула болай укыла: *төзек пирамиданың ян өслеге мәйданы нигез периметры белән апофемасы тапкырчыгышының яртысына тигез.*

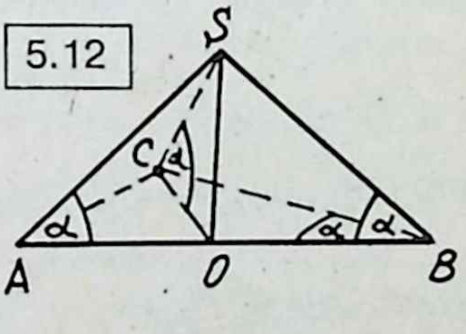
Әгәр пирамиданың барлык ян кабыргалары үзара тигез булсалар яки нигез яссылыгына бер үк почмак белән авышкан булсалар, пирамида биеклегенең нигезе нигезне камаучы әйләнәнең үзәге белән тәңгәл килә. SO биеклегенең нигезен пирамида нигезенең түбәләре белән тоташтырыйк. Без AOS, BOS, COS турыпочмаклы өчпочмакларын табабыз. Туры һәм яссылык арасындагы почмак, бу туры һәм аның яссылык



тагы проекциясе арасындагы почмак булганлыктан, $O\hat{A}S$, $O\hat{B}C$, $O\hat{C}S$ — ян кабыргалар белән пирамиданың нигезе арасындагы почмаклар булалар (5.10 рәс.). Шарт буенча $|AS| = |BS| = |CS|$ яки $O\hat{A}S = O\hat{B}C = O\hat{C}S$ булганлыктан, AOS, BOS, COS турыпочмаклы өчпочмакары үзара конгруэнтлар, димәк, $|AO| = |BO| = |CO|$, ягъни O ноктасы нигезнең түбәләреннән тигез ераклыкта ята.

Әгәр пирамиданың ян кырлары нигез яссылыгына бер үк почмак белән авышкан булсалар, ягъни нигезнең барлык яклары янындагы икекырлы почмаклары тигез (φ) булса, пирамида биеклеге нигезе нигезне камаучы әйләнәнең үзәгенә тәңгәл килә һәм $S_{ян} = \frac{S_н}{\cos\varphi}$ формуласы килеп чыгуын исбатларга була.





Пирамидада ABS кыры белән нигез яссылыгы арасындагы икекырлы почмакка тиңдәш сызыкча почмакны төзү өчен (5.11 рәс.). SO биеклеге аша AB кабыргасына перпендикуляр итеп яссылык үткәрәбез (бу мөмкин, чөнки $SO \perp AB$). Калган сызыкча почмаклар да шул рәвештә төзеләләр. MSO, NSO, PSO, QSO турыпочмаклы өчпочмаклары үзара конгруэнтлар, чөнки аларда SO катеты уртак һәм тигез почмаклары бар. Нәтиҗәдә, $|OM| = |ON| = |OP| = |OQ|$, ә төзү буенча $OM \perp AB$, $ON \perp BC$, $OP \perp DC$, $OQ \perp AD$ булганлыктан, O ноктасы пирамида нигезенең якларыннан тигез ераклыкта ята.

Беренче мәсьәлә. Өчпочмаклы пирамиданың барлык ян кабыргалары нигез яссылыгы белән бер үк почмак төзиләр. Бу почмак нигездә ятучы турыпочмаклы өчпочмакның бер почмагына тигез. Әгәр бу өчпочмакның гипотенузасы c ка, ә пирамиданың күләме V га тигез булса, бу почмакны табыгыз.

Чишү. Шарт буенча пирамида нигезендә турыпочмаклы $\triangle ABC$ (5.12 рәс.). ята, биредә $A\hat{C}B = \frac{\pi}{2}$, $|AB| = c$. Барлык ян кабыргалар бер үк почмакка авышканнар, шуның өчен SO биеклегенең нигезе пирамида нигезен камаучы әйләнә үзәге белән тәңгәл килә. Пирамиданың нигезе турыпочмаклы өчпочмак булганлыктан, O ноктасы AB гипотенузасының уртасында була һәм $|AO| = |BO| = |CO|$.

Шарт буенча $A\hat{B}C = O\hat{B}C = O\hat{C}S$ һәм бу почмакны табарга кирәк. Бу почмакны α га тигез дип алып, ABC өчпочмагыннан табабыз: $|BC| = |AB|\cos\alpha = c\cos\alpha$.

Пирамида нигезенең мәйданы:

$$S_H = \frac{1}{2}|AB||BC|\sin\alpha = \frac{1}{2}c^2\cos\alpha\sin\alpha.$$

$|OB| = |OC| = \frac{c}{2}$ булганлыктан, OCS өчпочмагыннан пирамиданың биеклеген табабыз: $|SO| = |OC|\operatorname{tg}\alpha = \frac{c}{2}\operatorname{tg}\alpha$.

Шулай итеп, пирамиданың күләме V белгесез почмак зурлыгы белән түбәндәге бәйләнешкә керә:

$$V = \frac{1}{3}S_H|SO| = \frac{1}{6}c^2\cos\alpha\sin\alpha\cdot\frac{c}{2}\operatorname{tg}\alpha = \frac{c^3}{12}\sin^2\alpha,$$

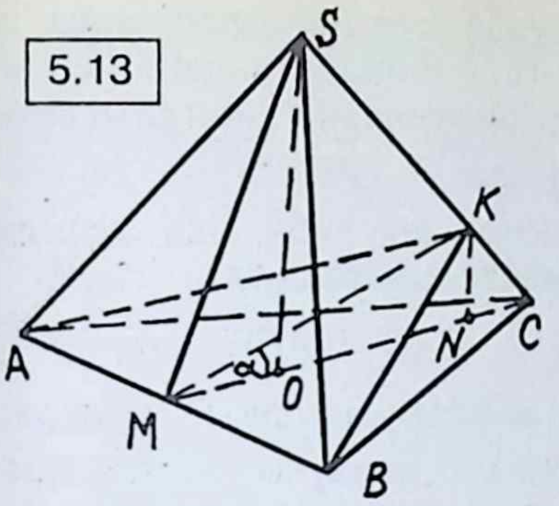
моннан $\sin^2\alpha = \frac{12V}{c^3}$. $\alpha \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ булганлыктан, $\sin\alpha = 2\sqrt{\frac{3V}{c^3}}$.

$\alpha = \arcsin 2\sqrt{\frac{3V}{c^3}}$.

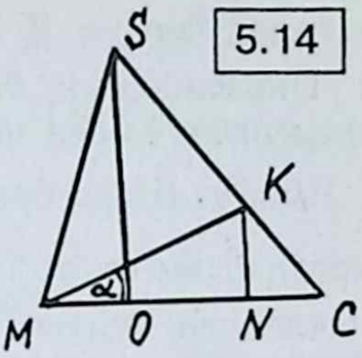
Икенче мәсьәлә. Өчпочмаклы пирамиданың (тетраэдрның) барлык кырлары төзек өчпочмаклар. Нигезенең ягы аша, нигездән исәпләгәндә, пирамида күләмен 1 : 3 чагыштырмасында бүлүче яссылык үткәрелгән. Бу яссылык белән пирамида нигезе яссылыгы арасындагы почмакны табыгыз.

Чишү. Мәсьәләнең шарты буенча, пирамиданың барлык кырлары — үзара тигез өчпочмаклар, ә $ABCS$ пирамидасы төзек пирамида һәм O ноктасы нигезнең үзәге була (5.13 рәс.). AB кабыргасы аша үтүче яссылык бирелгән пирамидадан күләме $ABCS$ күләменең $\frac{1}{4}$ е булган өчпочмаклы $ABCK$ пирамидасын кисеп ала.

5.13



5.14



CS кабыргасы һәм SO биеклеге аша пирамиданың нигезен CM буенча кисүче яссылык үткәрәбез. O ноктасы үзәк булганлыктан CM ABC өчпочмагының медианасы, биссектрисасы һәм биеклеге була. M ноктасы AB кабыргасын урталай бүлә, нәтиҗәдә SM ASB кырының медианасы, биссектрисасы һәм биеклеге була, өстәвенә $|MS| = |MC|$. Шулай итеп, $MC \perp AB$, $MS \perp AB$. Димәк, төзелгән яссылык AB кабыргасына перпендикуляр һәм CMK почмагы — без эзли торган сызыкча почмак. Бу почмак AB кабыргасы аша үтүче кисем белән пирамида нигезе яссылыгының икекырлы почмагына тиңдәш сызыкча почмак була.

MSC кисемен карыйк (5.14 рәс.), биредә SO — пирамиданың биеклеге, KN — кечкенә пирамида биеклеге.

Әгәр зур һәм кече пирамидаларның күләмнәрен V һәм V_1 дип тамгаласак, ул вакытта шарт буенча $V = 4V_1$, бу пирамидаларның нигезләре бер үк булганлыктан, $|SO| = 4|KN|$ була. Әйтик, $|MC| = a$, $\hat{CMK} = \alpha$, ул вакытта $|MS| = a$, $|MO| = \frac{1}{3}|MC| = \frac{a}{3}$, $|OC| = \frac{2}{3}a$, MSO өчпочмагыннан табабыз: $|SO| = \sqrt{|MS|^2 - |MO|^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{9}} = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$. $|KN| = \frac{1}{4}|SO| = \frac{a\sqrt{2}}{6}$ булганлыктан, COS һәм CNK өчпочмакларының охшашлыгыннан $|NC| = |KN|\frac{|OC|}{|SO|} = \frac{a\sqrt{2}}{6} \cdot \frac{2a}{3} \cdot \frac{3}{2a\sqrt{2}} = \frac{a}{6}$ ны табабыз. MKN турыпочмаклы өчпочмагыннан:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|KN|}{|MN|} = \frac{|KN|}{|MC| - |NC|} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{6}}{a - \frac{a}{6}} = \frac{\sqrt{2}}{5}.$$

Җавап. $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{5}$.

Өченче мәсьәлә. Пирамида нигезендә кысынкы почмаклы тигезьянлы өчпочмак ята. Бу ян яклар b га, ә нигез янындагы почмаклар α га тигез. Барлык ян кабыргалар пирамиданың нигез яссылыгы белән бер үк β почмагын хасил итәләр.

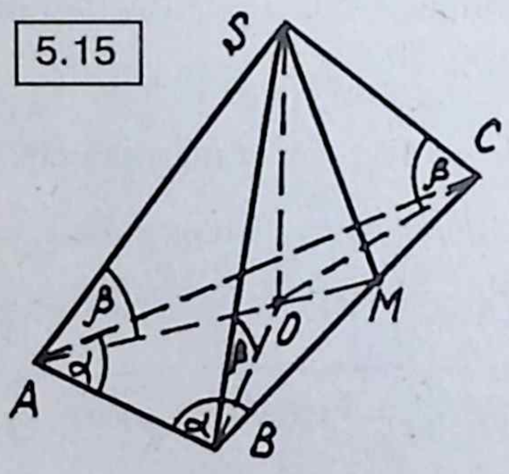
Пирамиданың биеклеге һәм α почмаклы түбә аша яссылык үткәрелгән. Килеп чыккан кисемнең мәйданын табыгыз.

Чишү. Шарт буенча $|AC| = |BC| = b$, $C\hat{A}B = A\hat{B}C = \alpha$, ян кабыргалар нигез яссылыгына β почмагы белән авышкан (5.15 рәс.). Биеклекнең нигезе (O) ABC өчпочмагын камаучы әйләнә үзәге белән тәңгәл килә, O ноктасы өчпочмакның эчендә ята һәм $|OA| = |OB| = |OC|$. A түбәсе һәм SO биеклеге аша үтүче яссылык кисемтәдә AMS өчпочмагын барлыкка китерә. Бу өчпочмакның биеклеге SO пирамиданың биеклегенә тәңгәл килә. Кисемнең мәйданын табу өчен $|SO|$ һәм $|AM|$ ны табарга кирәк.

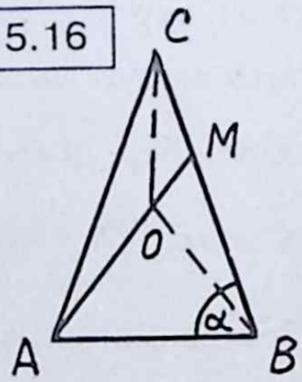
ABC өчпочмагында (5.16 рәс.) синуслар теоремасын кулланабыз: $\frac{|AC|}{\sin\alpha} = 2|AO|$, моннан $|AO| = \frac{b}{2\sin\alpha}$.

AOS турыпочмаклы өчпочмагыннан $|SO|$ ны табабыз: $|SO| = |AO|\operatorname{tg}\beta = \frac{b\operatorname{tg}\beta}{2\sin\alpha}$.

5.15



5.16



AMC өчпочмагын карыйк (5.16 рәс.). Бу өчпочмакта $A\hat{C}M = \pi - 2\alpha$ (ABC тигезьянлы өчпочмагында $C\hat{A}B = C\hat{B}A = \alpha$, монда өченче почмак $\pi - 2\alpha$ тигез), $C\hat{A}M = \frac{1}{2}A\hat{C}M = \frac{\pi}{2} - \alpha$ (AOC өчпочмагы тигезьянлы һәм $O\hat{A}C = O\hat{C}A = \frac{1}{2}A\hat{C}B$), ниһаять, AMC өчпочмагының өченче почмагы $\pi - \left(C\hat{A}M + A\hat{C}M\right)$ га тигез, ягъни $A\hat{M}B = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \pi - 2\alpha\right) = 3\alpha - \frac{\pi}{2}$.

AMC өчпочмагында синуслар теоремасын кулланып табабыз:

$$\frac{|AC|}{\sin\left(3\alpha-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{|AM|}{\sin(\pi-2\alpha)}, \text{ моннан } |AM| = AC\frac{\sin(\pi-2\alpha)}{\sin\left(3\alpha-\frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{b\sin 2\alpha}{\cos 3\alpha}.$$

Шулай итеп, AMS кисеменең мәйданы $\frac{1}{2}|SO|\cdot|AM|$ га тигез яки

$$S_{кис} = \frac{1}{2}\frac{b\,\mathrm{tg}\beta}{2\sin\alpha}\left(-\frac{b\sin 2\alpha}{\cos 3\alpha}\right) = -\frac{b^2\cos\mathrm{tg}\beta}{2\cos 3\alpha}.$$

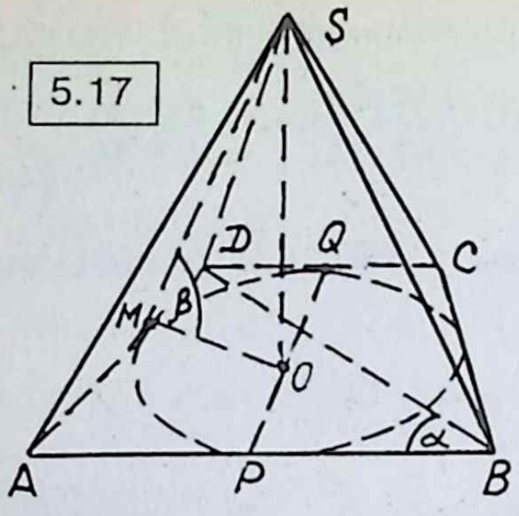
Җавап. $S_{кис} = -\dfrac{b^2\cos\alpha\,\mathrm{tg}\beta}{2\cos 3\alpha}.$

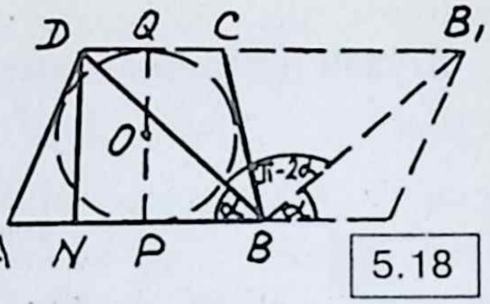
Искәрмә. Мәсьәләнең шарты буенча $\triangle ABC$ — кысынкы почмаклы, $\alpha < \frac{\pi}{2}$ һәм $A\hat{C}B = \pi - 2\alpha < \frac{\pi}{2}$, моннан $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Нәтиҗәдә, $\frac{3\pi}{4} < 3\alpha < \frac{3\pi}{2}$, $\cos 3\alpha < 0$.

Дүртенче мәсьәлә. Пирамиданың нигезендә тигезьянлы трапеция ята. Аның озынлыгы l булган диагонале зур нигезе белән α почмагын төзи. Пирамиданың барлык ян кырлары нигез яссылыгына β почмагы белән авышканнар. Пирамиданың тулы өслеген табыгыз.

Чишү. Мәсьәләнең шарты буенча пирамиданың нигезендә тигезьянлы ABCD трапециясе ята (5.17 рәс.). Биредә $|BD| = l$, $D\hat{B}A = \alpha$, $\left(|AB| > |DC|\right)$. Пирамиданың барлык ян кырлары нигез яссылыгына бер үк почмак белән авышканлыктан. SO биеклегенең нигезе нигезгә камалган әйләнәнең үзәге белән тәңгәл килә. Әгәр трапециягә әйләнә камалырлык булса, нигезләр суммасы ян яклар суммасына тигез, ягъни $|AB| + |DC| = |AD| + |BC|$. Димәк, $ABCD$ трапециясенең периметры $2\left(|AB| + |DC|\right)$ га тигез.

AD кабыргасына перпендикуляр итеп, пирамиданың SO биеклеге аша яссылык үткәрәбез. Бу яссылык белән пирамида кырлары кисешүдән табылган OMS сызыкча почмагы ян кыр белән нигез арасындагы, икекырлы почмакка тиңдәш. Шарт буенча $O\hat{M}S = \beta$, төзү буенча OM — пирамида нигезенә камалган әйләнәнең радиусы, MS — ян кырның биеклеге. Барлык ян кырларның биеклекләре тигез, шуның өчен пирамиданың ян өслеге $S_{ян} = |MS|\cdot\left(|AB| + |DC|\right)$ (пирамиданың ян өслеге нигез периметры белән апофема тапкырчыгышының яртысына тигез).





Пирамиданың нигез мәйданы (5.18 рәс.) $\frac{1}{2}|DB||BB_1|\cdot\sin(\pi-2\alpha)$, биредә $|DB|=|BB_1|=l$. Димәк, $S_H=\frac{1}{2}l^2\sin 2\alpha$. Ян өслекне табу өчен $ABCD$ трапециясенең периметрын һәм SM апофемасын табу кирәк. BDM өчпочмагыннан (5.18 рәс.): $|DN|=|DB|\sin\alpha=l\sin\alpha$. Ләкин $|DN|=|PQ|=2r$, биредә r — әйләнә радиусы. Димәк, $r=\frac{1}{2}l\sin\alpha$. OMS өчпочмагыннан (5.17 рәс.) ян кыр биеклеген табабыз:

$$|MS|=\frac{|MO|}{\cos\beta}=\frac{r}{\cos\beta}=\frac{l\sin\alpha}{2\cos\beta}.$$

Ярымпериметрны $|AB|+|DC|$ табу өчен трапеция мәйданы формуласын кулланабыз: $S_H=\frac{|AB|+|DC|}{2}\cdot|PQ|=(|AB|+|DC|)r=$ $=(|AB|+|DC|)\frac{1}{2}l\sin\alpha=\frac{1}{2}l^2\sin 2\alpha$. Моннан $|AB|+|DC|=2l\cos\alpha$.

Шулай итеп, ян өслеген түбәндәге аңлатмадан табабыз:

$$S_{ян}=|SM|\cdot(|AB|+|DC|)=\frac{l\sin\alpha}{2\cos\beta}2l\cos\alpha=\frac{l^2\sin 2\alpha}{2\cos\beta}.$$

Пирамиданың тулы өслеге: $S=S_H+S_{ян}=\frac{1}{2}l^2\sin 2\alpha+\frac{l^2\sin 2\alpha}{2\cos\beta}=$ $=\frac{l^2\sin^2\alpha}{2\cos\beta}(\cos\beta+1)=\frac{l^2\sin 2\alpha\cos^2\frac{\beta}{2}}{\cos\beta}$.

Җавап. $S=\frac{l^2\sin 2\alpha\cos^2\frac{\beta}{2}}{\cos\beta}$.

Искәрмә. Ян кырлар нигезгә бер үк β почмагы белән авышканлыктан, $S_{ян}=\frac{S_н}{\cos\beta}$ формуласын кулланып, җавапны башка ысул белән дә табарга була иде.

Үзлегеңнән чишү өчен мәсьәләләр

1. Өчпочмаклы пирамидада нигезнең бер ягы a га, аңа чиктәш почмаклар α һәм β га тигез. Барлык ян кабыргалар пирамиданың биеклеге белән бер үк φ почмагы төзиләр. Пирамиданың күләмен табыгыз.

2. Пирамиданың нигезендә кысынкы почмагы α булган ромб ята. Барлык ян кырлар нигез яссылыгы белән бер үк икекырлы β почмагы төзиләр. Нигезнең зур диагонале һәм пирамиданың түбәсе аша үткәрелгән кисемнең мәйданы S булса, пирамиданың күләмен табыгыз.

3. Пирамиданың нигезендә мәйданы S, түбә янындагы почмагы α булган тигезьянлы өчпочмак ята. Әгәр барлык ян кабыргалар белән пирамида биеклеге арасындагы почмак β булса, пирамиданың күләмен табыгыз.

4. Өчпочмаклы төзек пирамидада түбәдәге яссы почмак α га тигез. Ян кабырга белән нигезнең аңа каршы ятучы ягы арасындагы иң кечкенә ераклык d га тигез. Пирамиданың күләмен табыгыз.

5. Күләме V булган өчпочмаклы төзек пирамида нигезенең ягы аша күләмне икегә бүлүче һәм нигезгә α почмагы ясап авышкан яссылык үткәрелгән. Килеп чыккан кисемнең мәйданын табыгыз.

6. Пирамида нигезендә кысынкы почмагы α, ян яклары a га тигез булган тигезьянлы трапеция ята. Барлык ян кырлар пирамида нигезе белән бер үк β почмагын төзиләр. Пирамиданың тулы өслеген табыгыз.

7. Пирамида нигезе булып, нигезе a, аңа каршы ятучы почмагы α булган тигезьянлы өчпочмак тора. Түбә аша үтүче ян кабыргалар нигез белән β почмагын төзиләр. Әгәр пирамиданың биеклеге нигезнең биеклекләре кисешү ноктасы аша үтсә, пирамиданың күләмен табыгыз.

8. Дүртпочмаклы төзек пирамиданың биеклеге ян кабырга белән α почмагын төзи. Пирамиданың түбәсе аша нигезнең диагоналенә параллель итеп яссылык үткәрелгән. Әгәр бу кисемнең мәйданы S булып, икенче диагональ белән ул β почмагын төзесә, пирамиданың биеклеген табыгыз.

9. Пирамиданың нигезендә гипотенузасы c, кечерәк кысынкы почмагы α булган турыпочмаклы өчпочмак ята. Иң зур ян кабырга нигез яссылыгы белән β почмагын төзи. Әгәр пирамиданың биеклеге нигез медианалары кисешкән нокта аша үтсә, пирамиданың күләмен табыгыз.

10. Дүртпочмаклы төзек пирамиданың нигезе үзәгеннән ян кырларга һәм ян кабыргаларга булган ераклык тиңдәш рәвештә a һәм

b га тигез. Пирамида нигезе белән ян кыр арасындагы икекырлы почмакны табыгыз.

Җаваплар

1. $\frac{a^3 \sin\alpha \sin\beta \operatorname{ctg}\varphi}{12 \sin^2(\alpha+\beta)}$.

2. $\frac{2S}{3\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{S\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\beta}$.

3. $\frac{S\sqrt{2S\sin\alpha}\operatorname{ctg}\beta}{6\sin\alpha\cos\alpha/2}$.

4. $\frac{d^3}{9\sin^2\frac{\alpha}{2}\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{3}\right)}$.

5. $\frac{\sqrt{3}}{\cos\alpha}\sqrt[3]{\frac{1}{2}V^2 ctg^2\alpha}$.

6. $\frac{2a^2\sin\alpha\cos^2\frac{\beta}{2}}{\cos\beta}$.

7. $\frac{a^3\cos\alpha \operatorname{tg}\beta}{24\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

8. $\sin\beta\sqrt{-\frac{S\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}}$.

9. $\frac{1}{36}c^3\sin2\alpha \operatorname{tg}\beta\sqrt{3\cos^2\alpha+1}$.

10. $\arccos\sqrt{\frac{2a^2-b^2}{b^2}}$.

2. ӘЙЛӘНҮ ҖИСЕМНӘРЕ

2.1. Цилиндр

Әгәр ф фигурасы нинди дә булса фигураның күчәр тирәсендә әйләнүеннән килеп чыкса, аны *әйләнү фигурас*ы дип атыйлар.

Билгеләмә. Турыпочмакны аның бер ягын эченә алган күчәр тирәсендә әйләндерүдән килеп чыккан фигура *цилиндр* дип атала (5.19 рәс.).

Цилиндрның нигез радиусы аның радиусы, нигез яссылыклары арасындагы ераклык биеклеге, нигезләрнең үзәкләре аша үтүче туры цилиндрның күчәре дип атала.

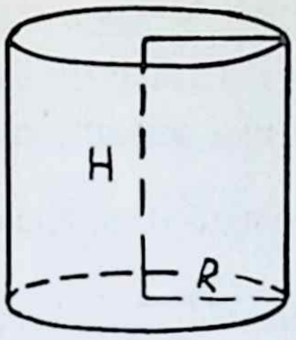
Цилиндрның ян өслеге итеп тиңдәшле җәелмәнең мәйданы кабул ителгән, ул 5.20 рәсемендә сурәтләнгән.

$$S_{ян} = CH = 2\pi RH.$$

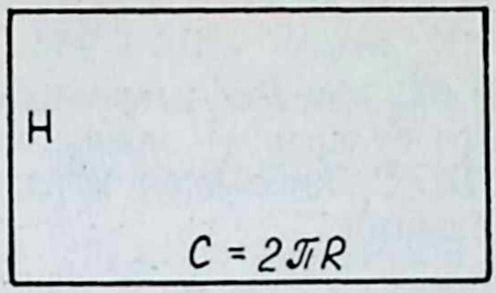
Цилиндрның тулы өслеге $S_{цил} = 2\pi RH + 2\pi R^2$ формуласы белән исәпләнә.

Цилиндрның күләме $V = \pi R^2 H$ формуласы белән исәпләнә, биредә R цилиндрның радиусы, H — аның биеклеге.

5.19



5.20



Беренче мәсьәлә. Аскы нигезгә α почмагы ясап авышкан һәм нигезнең үзәге аша үтүче яссылык югары нигезнең β дугасы тартып торган һәм озынлыгы b булган хорда аша үтә. Цилиндрның күләмен, ян өслеген һәм кисем мәйданын исәпләгез.

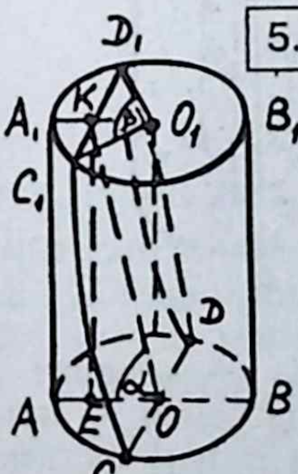
Чишү. 1) Шарт буенча $|C_1D_1| = b$, $C_1\breve{A}_1D_1 = C_1\hat{O}_1D_1 = \beta$, CDD_1C_1 — эзләгән кисем (5.21 рәс.). K ноктасыннан (b хордасының уртасы) нигез яссылыгына KE перпендикуляры төшерәбез, O ноктасын K ноктасы белән тоташтырабыз (OE OK ның проекциясе була). Шарт буенча $CD_1 \parallel CD$, $O_1K \perp C_1D_1$, чөнки A_1O_1 хорданың уртасы аша үтүче әйләнмә радиусы. Өч перпендикуляр турындагы теорема буенча $CD \perp OK$, димәк, $A\hat{O}K = \alpha$. Турыпочмаклы D_1O_1K өчпочмагыннан

$$|O_1D_1| = R = \frac{|KD_1|}{\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{b}{2\sin\frac{\beta}{2}}, \quad |O_1K| = \frac{b}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$$

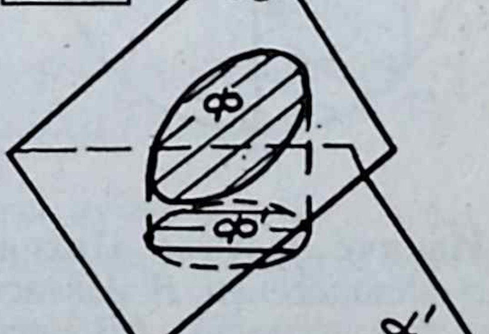
икәнен беләбез. OEK өчпочмагыннан табабыз:

$$|KE| = H = |OE|\operatorname{tg}\alpha = |O_1K|\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\alpha.$$

5.21



5.22



Моннан:

$$V = \pi R^2 H = \frac{\pi b^3 \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\alpha}{8\sin^2\frac{\beta}{2}}; \quad S_{ян} = 2\pi RH = \frac{\pi b^2 \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\alpha}{2\sin\frac{\beta}{2}}.$$

2) CC_1 һәм DD_1 кәкреләре — бирелгән яссылыкка әйләнә проекцияләре буларак — эллипс өлешләре.

CDD_1C_1 кисеменең мәйданын табу өчен түбәндәге раслаудан файдаланыйк:

Лемма. Әйтик, ϕ, ϕ' фигуралар, α, α' яссылыклар һәм $\phi \subset \alpha$, $\phi' \subset \alpha'$, булсын ди. Биредә ϕ' — ϕ фигурасының α яссылыгына ортогональ проекциясе (5.22 рәс.). γ, α һәм α' яссылыклары арасындагы почмак булсын. Ул вакытта: $S_{\phi'} = S_{\phi}\cos\gamma$. Биредә $S_{\phi'}$ һәм S_{ϕ} ϕ һәм ϕ' фигураларының мәйданнары.

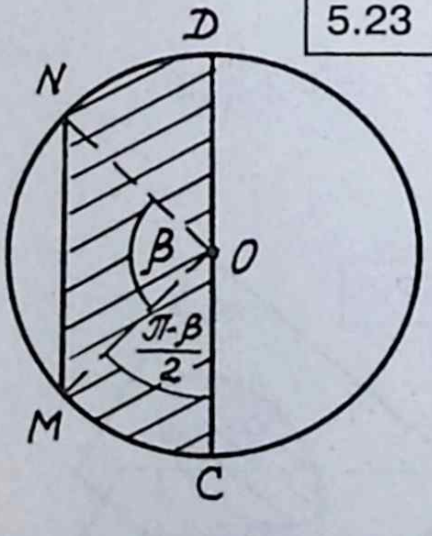
Шулай итеп, CDD_1C_1 кисеменең мәйданын табу өчен бу кисемнең аскы нигезгә булган проекциясен табу җитә (5.23 рәс.), ягъни кәкресызыклы $MCDN$ трапециясенең мәйданын табу кирәк:

$$S = S_{\Delta MNO} + 2S_{MOC_{сект}} = \frac{1}{2}R^2\sin\beta + 2\frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}\right) =$$

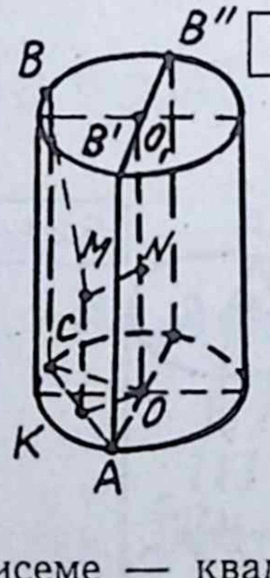
$$= R^2/2\left(\pi - \beta + \sin\beta\right).$$

Лемма буенча $S_{CDD_1C_1} = \dfrac{R^2(\pi-\beta+\sin\beta)}{2\cos\alpha}$.

Цилиндрның үз күчәре аша үтүче яссылык белән кисеме— *күчәр кисеме* дип атала.



5.23



5.24

Икенче мәсьәлә. Цилиндрның күчәр кисеме — квадрат. Өске нигез әйләнәсенең B ноктасын аскы нигез әйләнәсенең A ноктасы белән тоташтыручы AB кисемтәсенең озынлыгы a һәм бу кисемтә цилиндр күчәреннән b ераклыгында тора. AB кисемтәсе белән нигез яссылыгы арасындагы почмакны табыгыз.

Чишү. Төзү буенча, AC — AB авышмасының проекциясе (524 рәс.), шунлыктан эзләнгән почмак $B\hat{A}C = \alpha$ була. MN кисемтәсе аскы нигез яссылыгына параллель, димәк, $MN \perp MK$. Димәк, MN һәм нәтиҗәдә KO да ABC өчпочмагы яссылыгына перпендикуляр булалар, һәм $KO \perp AC$. Турыпочмаклы ABC өчпочмагыннан $|AC| = a\cos\alpha$, $|BC| = a\sin\alpha$ икәнен табабыз. OKC өчпочмагыннан $|CK|^2 + |OK|^2 = |OC|^2$ икәне билгеле. OK — тигезьянлы AOC өчпочмагының биеклеге булганлыктан $|CK| = \frac{|AC|}{2} = \frac{a}{2}\cos\alpha$, төзү буенча OK OAC өчпочмагының биеклеге булып тора һәм ул b га тигез. Мәсьәләнең шарты буенча $|OC| = |BC|\ /2 = a\sin\alpha\ /\ 2$. α ны табу өчен тигезләмә төзибез. $\left(\frac{a\cos\alpha}{2}\right)^2 + b^2 = \left(\frac{a\sin\alpha}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \cos 2\alpha = -\frac{4b^2}{a^2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{4b^2}{a^2}\right)$.

Ике очракны әйтеп китик:

1) B ноктасы B' ноктасына тәңгәл килсә, ягъни A B^1 ноктасының проекциясе булса, $b = |AO|$, $a = 2|AO|$, шуның өчен $\alpha = \frac{1}{2}\arccos(-1) = \frac{\pi}{2}$.

2) B ноктасы B'' ноктасына тәңгәл килсен, ул вакытта $b = 0$, $a = 2\sqrt{2}\ |AO|$. Димәк, $\alpha = \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{0}{a^2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$.

Ике очракны да геометрик күзалларга мөмкин.

Җавап. $\alpha = \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{4b^2}{a^2}\right)$.

Үзлегеңнән эшләү өчен мәсьәләләр

1. Цилиндрның күчәр кисеменең диагональләре нигезгә карата α зурлыгындагы почмак ясап кисешәләр. Цилиндрның күләме V га тигез. Цилиндрның биеклеген табыгыз.

2. Цилиндрның нигез мәйданы белән күчәр кисеме мәйданнары $m:n$ чагыштырмасында. Күчәр кисеменең диагональләре арасындагы кысынкы почмакны табыгыз.

3. Цилиндрның төзүчесе аша үткәрелгән яссылык шул төзүче аша үткәрелгән күчәр кисеме белән кысынкы α почмагы төзи. Бу

турыпочмаклы кисемнең диагонале l га тигез һәм ул нигез яссылыгына β почмагы белән авышкан. Цилиндрның күләмен табыгыз.

4. Цилиндрның ян өслеге җәелмәсе — турыпочмаклык. Аның диагонале a га тигез һәм нигез белән α почмагын төзи. Цилиндрның күләмен табыгыз.

5. Цилиндрның өске нигезе әйләнәсенең бер ноктасын аскы нигезе әйләнәсенең бер ноктасы белән тоташтыручы кисемтәнең озынлыгы l һәм ул нигезгә α почмагы ясап авышкан. Әгәр күчәр кисеме квадрат булса, бу кисемтәнең күчәрдән ераклыгын табыгыз.

6. A ноктасы цилиндрның өске, ә B ноктасы аскы нигез әйләнәсендә ята. AB кисемтәсе нигез яссылыгына α почмагы ясап авышкан һәм B ноктасы аша үтүче күчәр кисеме белән β почмагын төзи. Әгәр AB озынлыгы l булса, цилиндрның күләмен табыгыз.

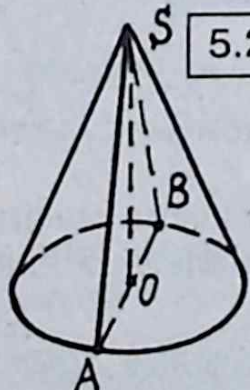
Җаваплар

1. $\sqrt{\dfrac{4V\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}{\pi}}$.
2. $2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{4m}{\pi n}$.
3. $\dfrac{\pi l^3 \sin 2\beta \cos\beta}{8\cos^2\alpha}$.
4. $\dfrac{a^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{4\pi}$.
5. $\frac{l}{2}\sqrt{-\cos 2\alpha}$.
6. $\dfrac{\pi l^3 \sin 2\alpha \cos^3\alpha}{8\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$.

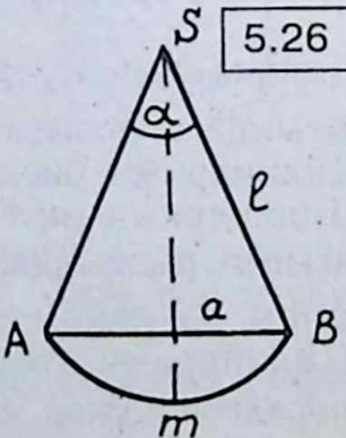
2.2. Конус

Билгеләмә. Турыпочмаклы өчпочмакны аның бер катетын әченә алган күчәр тирәсендә әйләндерүдән килеп чыккан фигура *конус* дип атала (5.25 рәс.). Бу туры конус була. Өчпочмакның икенче катеты, бу күчәр тирәсендә әйләнеп, *конусның нигезе* дип атала торган түгәрәкне бирә. Бу күчәр тирәсендә гипотенузаны әйләндерүдән килеп чыккан фигура конусның *ян өслеге* дип атала.

Конус түбәсен әйләнәнең ноктасы белән тоташтыручы кисемтә конусның *төзүчесе* дип атала.



5.25



5.26

Конусның түбәсеннән нигез яссылыгына төшерелгән перпендикуляр аның биеклеге дип атала. Туры конус биеклегенең нигезе нигезнең үзәге белән тәңгәл килә. Конусның биеклеген эченә алган туры аның күчәре дип атала. Конусның күчәре аша үтүче яссылык белән киселе күчәр киселе дип атала. Бу кисем тигезьянлы өчпочмак хасил итә, бу өчпочмакның түбә янындагы почмагы конусның ачылу почмагы дип атала.

Конусның ян өслеге $S_{ян} = \pi Rl$ формуласы белән исәпләнә, биредә R — нигез радиусы, l — төзүче.

Конусның тулы өслеге $S_{кон} = \pi Rl + \pi R^2$ формуласы белән исәпләнә.

Конусның күләмә $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$ формуласы белән исәпләнә, биредә H — конусның биеклеге.

Беренче мәсьәлә. Конусның ян өслек җәелмәсе α почмаклы һәм a хордалы түгәрәк сектор була. Конусның күләмен табыгыз.

Чишү. Тигезьянлы ACB өчпочмагында (5. 26 рәс.) $|AS| = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ була, чөнки AS — конусның төзүчесе. $A\,m\,B$ дугасының озынлыгы $2\pi R$ га тигез, биредә R — конус нигезенең радиусы. Икенче яктан, бу дуганың озынлыгы $|AS|\cdot\alpha = \frac{a\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ (α радианнарда исәпләнә).

R ны табу өчен тигезләмә таптык:

$$2\pi R = \frac{a\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow R = \frac{a\alpha}{4\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Конусның биеклеге: $H = \sqrt{(AS)^2 - R^2} = \frac{a\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}}{4\pi\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Җавап. $V = \frac{\alpha^2 a^3\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}}{192\pi^2\sin^3\frac{\alpha}{2}}$.

Икенче мәсьәлә. Конусның ачылу почмагы 2α га, биеклеге белән төзүче суммасы m га тигез. Конусның күләмен табыгыз.

Чишү. Шарт буенча $A\hat{S}B = 2\alpha$, $|SO| + |SB| = m$ (5.25 рәс.). $|SO| = H$, $|SB| = l$, $|OB| = R$ дип тамгалап, OBS өчпочмагыннан табабыз: $H = l\cos\alpha$, $R = l\sin\alpha$, $|SO| + |SB| = m$ шарты болай языла: $l\cos\alpha + l = m \Rightarrow l = \frac{m}{1+\cos\alpha} = \frac{m}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$.

Моннан $H = l\cos\alpha = \frac{m\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$, $R = l\sin\alpha = \frac{m\sin\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = m\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$.

Нәтиҗәдә, $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{\pi m^2 \mathrm{tg}^2 \frac{\alpha}{2} m \cos\alpha}{6\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\pi m^3 \sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}{6\cos^4\frac{\alpha}{2}}$.

Искәрмә. Әгәр $\alpha = \frac{\pi}{2}$ булса, $V = 0$ икәнлеге геометрик яктан ачык аңлашыла.

Өченче мәсьәлә. Конусның биеклеге H, ачылу почмагы α. Биеклекнең уртасыннан аңа β почмагы белән, конусны ике ноктада кисүче туры үткәрелгән. Бу турының конус эчендәге кисемтәсенең озынлыгын табыгыз.

Чишү. Шарт буенча биеклек $|SO| = H$, $S\hat{O}_1D = \beta$, $A\hat{S}B = \alpha$ (5.27 рәс.) $|SO_1| = H/2$. SO_1D өчпочмагында синуслар теоремасын кулланабыз: $\frac{|O_1D|}{\sin O_1\hat{S}D} = \frac{|SO_1|}{\sin O_1\hat{D}S} \Leftrightarrow \frac{|O_1D|}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{|SO_1|}{\sin(\pi - \frac{\alpha}{2} - \beta)} \Rightarrow |O_1D| =$ $= \frac{H\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin(\frac{\alpha}{2}+\beta)}$.

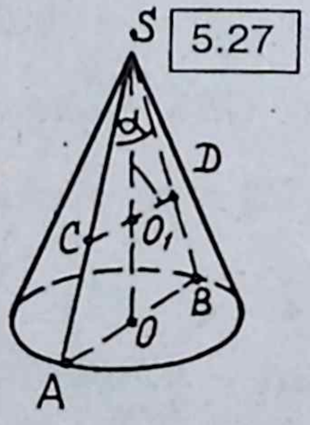
SCO_1 өчпочмагында синус теоремасын кулланабыз:

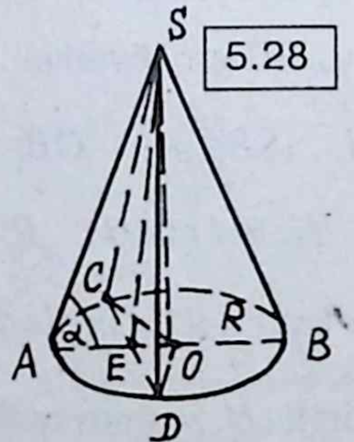
$$\frac{|O_1C|}{\sin C\hat{S}O_1} = \frac{|SO_1|}{\sin S\hat{C}O_1} \Leftrightarrow \frac{|O_1C|}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{|SO_1|}{\sin(\beta - \frac{\alpha}{2})} \Rightarrow |O_1C| = \frac{H\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin(\beta - \frac{\alpha}{2})}.$$

$$|CD| = |O_1D| + |CO_1| = \frac{H\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin(\beta+\frac{\alpha}{2})} + \frac{H\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin(\beta-\frac{\alpha}{2})} = \frac{H\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin(\beta+\frac{\alpha}{2})\sin(\beta-\frac{\alpha}{2})} \times$$

$$\times\left(\sin\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)\right) = \frac{2H\sin\frac{\alpha}{2}\sin\beta\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin(\beta+\frac{\alpha}{2})\sin(\beta-\frac{\alpha}{2})}.$$

Җавап. $CD = \frac{H\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\beta+\frac{\alpha}{2})\sin(\beta-\frac{\alpha}{2})}$.





Искәрмә. $\beta \to \frac{\alpha}{2}$ очрагында $|CD| \to \infty$.

Чыннан да, бу очракта эзләгән туры AS яки BS төзүчеләренең берсен генә кисә.

Дүртенче мәсьәлә. Конусның нигез радиусы R га тигез, ә төзүче нигезгә α почмагы ясап авышкан. Конусның түбәсе аша аның биеклеге белән φ почмагы ясап яссылык үткәрелгән. Бу кисемнең мәйданын табыгыз.

Чишү. Шарт буенча нигез радиусы R, $S\hat{A}O = \alpha$ (5.28 рәс.). Эзли торган кисемне төзибез. O үзәгеннән $СД$ хордасына OE перпендикулярын төшерәбез һәм E ноктасын S түбәсе белән тоташтырабыз. Өч перпендикуляр теоремасы буенча $CD \perp OE \Rightarrow CD \perp SE$. Димәк, $E\hat{S}O = \varphi$, SAO өчпочмагында $|SO| = H = R\mathrm{tg}\alpha$ була, SOE өчпочмагыннан $|SE| = \frac{H}{\cos\varphi} = \frac{R\mathrm{tg}\alpha}{\cos\varphi}$, $|OE| = H\mathrm{tg}\alpha = R\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\varphi$.

Моннан $EOД$ өчпочмагыннан табабыз: $|ED| = \sqrt{|OD|^2 - |OE|^2} =$

$$= \sqrt{R^2 - R^2\mathrm{tg}^2\alpha\mathrm{tg}^2\varphi} = \frac{R}{\cos\alpha\cos\varphi}\sqrt{\cos^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta} =$$

$$= \frac{R}{\cos\alpha\cos\varphi}\sqrt{\cos(\alpha-\varphi)\cos(\alpha+\varphi)}.$$

Ниһаять $S_{DCS} = \frac{1}{2}|CD||SE| = |ED|\cdot|SE|$.

Җавап. $S_{DCS} = \dfrac{R^2\sin\alpha\sqrt{\cos(\alpha-\varphi)\cos(\alpha+\varphi)}}{\cos^2\alpha\cdot\cos^2\varphi}$.

Искәрмә. Тамырасты аңлатмасының тискәре булмавын күрсәтү кирәк. Чыннан да, $\mathrm{tg}\varphi = \frac{|OE|}{H}$, $\mathrm{ctg}\alpha = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{|OA|}{H}$ һәм $|OE| < |OA|$ булганлыктан, $\mathrm{tg}\varphi < \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ була. Моннан $\varphi < \frac{\pi}{2} - \alpha \Rightarrow$ $\Rightarrow (\alpha + \varphi) < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(\alpha + \varphi) > 0$.

Үзлегеңнән чишү өчен мәсьәләләр

1. Конус нигезенең радиусы R га, ян өслек җәелмәсенең түбә почмагы $90°$ ка тигез. Конусның күләмен табыгыз.

2. Конусның ян өслеге нигез мәйданыннан ике тапкыр зуррак. Күчәр кисеме мәйданы Q га тигез. Конусның күләмен табыгыз.

3. Мәйданы S булган турыпочмаклы өчпочмакны бер катеты тирәсендә әйләндереп конус ясыйлар. Әгәр әйләнгәндә медианаларның кисешү ноктасы сызган әйләнә озынлыгы l булса, бу конусның күләмен табыгыз.

4. Конусның нигез радиусы R. Үзара перпендикуляр булган ике төзүче конусның ян өслек мәйданын $1:2$ чагыштырмасындагы кисәкләргә бүлә. Бу конусның күләмен табыгыз.

5. Конусның биеклеге h, төзүчесе l. Бу конус яссылыкта ята һәм үзенең хәрәкәтсез түбәсе тирәсендә тәгәри. Конусның биеклеге сызган өслекнең мәйданын табыгыз.

6. Конусның төзүчесе нигез яссылыгына α почмагы ясап авышкан. Әгәр ян өслек мәйданы Q булса, бу конусның күләмен табыгыз.

7. Нигезләре параллель һәм уртак биеклекләре H булган ике конус бирелгән. Беренче конусның төзүчесе нигезгә α икенчесенең төзүчесе β почмагы ясап авышканнар. Бу ике конусның ян өслекләре кисешкән әйләнәнең озынлыгын табыгыз.

8. Нигезнең хордасы һәм конусның түбәсе аша кисем үткәрелгән. Хорданың озынлыгы a га, бу хорда белән тартылып торган кечкенә дуга α га тигез. Әгәр кисемнең төзүчеләре арасындагы почмак β булса, бу конусның күләмен табыгыз.

Җаваплар

1. $\pi R^3 \dfrac{\sqrt{15}}{3}$. 2. $\dfrac{\pi Q\sqrt{Q}}{3\sqrt[4]{3}}$. 3. Sl.

4. $\dfrac{\pi R^3\sqrt{2}}{6}$. 5. $\dfrac{\pi h^3}{l}$. 6. $\dfrac{Q\sin\alpha}{3}\sqrt{\dfrac{Q\cos\alpha}{\pi}}$.

7. $\dfrac{2H\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. 8. $\dfrac{\pi a^3\sqrt{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}}{24\sin^3\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}$.

2.3. Сфера һәм шар

Билгеләмә. Пространствоның бирелгән ноктасыннан (O) бирелгән ераклыкта урнашкан барлык нокталар күплеге сфера яки шар өслеге дип атала. O ноктасы сфераның үзәге дип, OM кисемтәсе сфераның радиусы дип атала $\left(|OM| = R\right)$ (5.29 рәс). Сфераның теләсә нинди ике ноктасын тоташтыручы кисемтә аның хордасы, O үзәге аша үтүче хорда аның диаметры, шар өслеге белән чикләнгән җисем шар дип атала. Ярымтүгәрәкне шул ярымтүгәрәк диаметрын эченә алган күчәр тирәсендә әйләндерү юлы белән шар китереп чыгарырга мөмкин. Ярымәйләнәне әйләндергәндә килеп чыккан фигура сфера була һәм ул шар өслеген тәшкил итә.

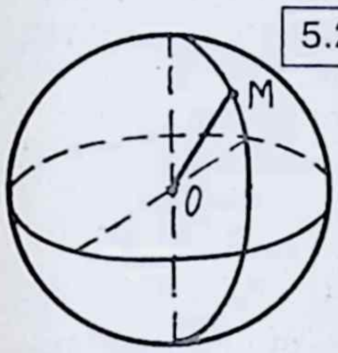
Шарның өслек мәйданы $S = 4\pi R^2$, күләме $V = \frac{3}{4}\pi R^3$ формулалары белән исәпләнә.

(Бу формулаларны чыгару юлын исегезгә төшерегез.)

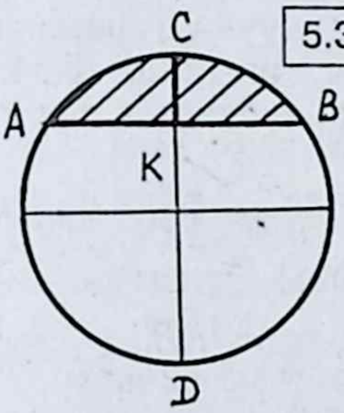
Шарның барлык яссы кисемнәре түгәрәк була. Шарның үзәге аша үтүче яссылык диаметраль яссылык дип атала. Шарның диаметраль яссылык белән кисеме — зур түгәрәк дип, ә сфера белән кисеме зур әйләнә дип атала.

Шардан нинди дә булса яссылык белән кисеп алынган өлеш шарның сегменты дип атала. Шар сегментын башкача да табып була. Түгәрәк сегменты аның хордасына перпендикуляр булган диаметр тирәсендә әйләнгәндә килеп чыккан фигура шулай ук шар сегменты дип атала (5.30, 5.31 рәс.).

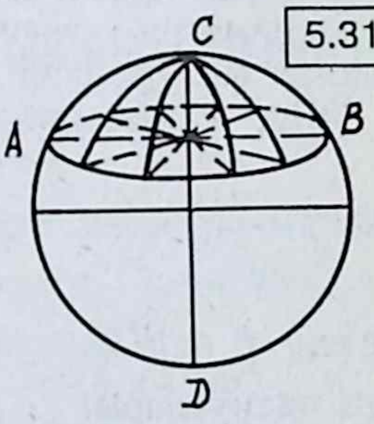
5.29



5.30



5.31



Сегмент өслеге мәйданы түбәндәге формула белән исәпләнә:

$$S_{ш.сег} = 2\pi Rh, \qquad (5.1)$$

биредә R — шарның радиусы, $h = |KC|$ — сегментның биеклеге.

Шар сегментының күләме: $V_{ш.сег} = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)$.

Түгәрәк секторын бу секторны чикләүче радиусларның берсен эченә алган күчәр тирәсендә әйләндерүдән килеп чыккан фигураны шар секторы дип атыйлар (5.32, 5.33 рәс.). Шар секторының күләме түбәндәге формула белән исәпләнә:

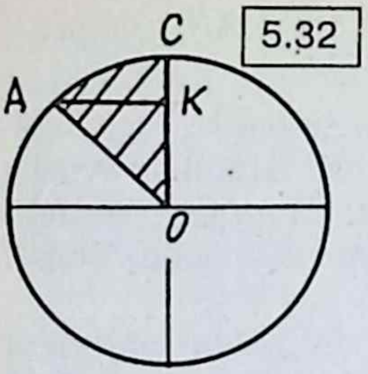
$$V_{ш.сек} = \frac{2}{3}\pi R^2 h, \qquad (5.2)$$

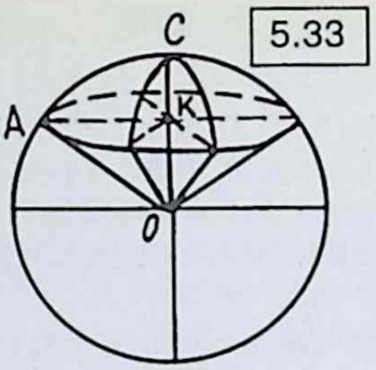
биредә $h = |KC|$.

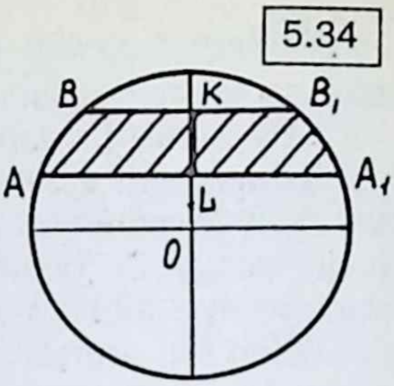
Шар секторының тулы өслек мәйданы сегмент өслегенең мәйданы һәм түбәсе 0 булган конусның ян өслек мәйданы суммасына тигез:

$$S_{ш.сек} = S_{ш.сегм} + S_{ян.кон}, \qquad (5.3)$$

биредә $S_{ян.кон} = \pi R\sqrt{2Rh - h^2}$.







Шар катлавы дип, шарның ике параллель кисүче яссылык арасында яткан өлешен атыйлар. Башкача да билгеләп була. Ике параллель хорда арасындагы түгәрәк өлешен бу хордаларга перпендикуляр диаметрны эченә алган күчәр тирәсендә әйләндерүдән килеп чыккан фигура шар катлавы дип атала (5.34, 5.35 рәс.).

Шар катлавының күләме түбәндәге формула буенча табыла:

$$V_{ш.к} = \frac{\pi h^3}{6} + \frac{\pi}{2}\left(r_1^2 + r_2^2\right)h,$$

биредә $h = |KL|$ — биеклек, $r_1 = |KB|$, $r_2 = |LA|$ — шар катлавының радиуслары.

Шар өслегенең ике кисүче параллель яссылык арасына кереп калган өлеше шар поясы дип атала, яки AB дугасын KZ күчәре тирәсендә әйләндерүдән килеп чыккан фигура шар поясы дип атала.

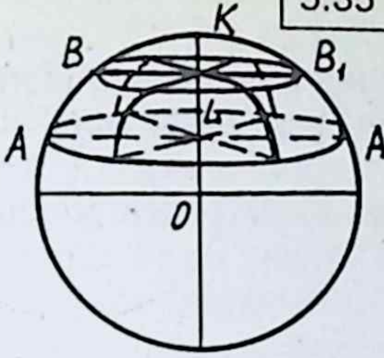
Шар поясы мәйданы $S_{ш.п} = 2\pi Rh$ формуласы белән исәпләнә.

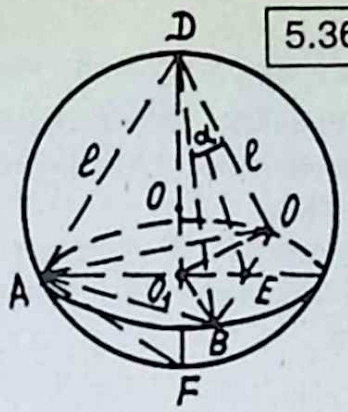
Беренче мәсьәлә. Радиусы R булган шар өстендәге ноктадан бер-берсенә α почмагы ясап өч хорда үткәрелгән. Аларның озынлыгын табыгыз.

Чишү. $|DA| = |DB| = |DC| = l$. $A\hat{D}B = B\hat{D}C = A\hat{D}C$ булсын (5.36 рәс.) $ВДЕ$ өчпочмагыннан $|BE| = l\sin\frac{\alpha}{2} \Rightarrow |BC| = 2|BE| = 2l\sin\frac{\alpha}{2}$ не табабыз. Шулай ук $|AB| = |AC| = 2l\sin\frac{\alpha}{2}$ икәне табыла. Димәк, яссылыгына $\triangle ABC$ — тигезьянлы өчпочмак. O_1 ноктасы ABC өчпочмагы $ДO_1$ перпендикулярының низеге һәм ул $ДF$ диаметрында ята дигән фикерне исбатлавы авыр түгел. Турыпочмаклы $АДF$ өчпочмагыннан табабыз $l^2 = AD^2 = 2R|DO_1|$;

$|DO_1|$ не $ДO_1A$ өчпочмагыннан да табарга була:

$|DO_1| = \sqrt{|AB|^2 - |AO_1|^2}$, биредә $|AD| = l$; $|AO_1| = \frac{|BC|}{\sqrt{3}} = \frac{2l\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$.





Шуның өчен $|DO_1| = l\sqrt{1 - \frac{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3}}$; $l^2 = 2R|DO_1| = 2Rl\sqrt{1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

Шулай итеп, $l = 2R\sqrt{1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}$. Тамыр астындагы аңлатманың уңай булуын күрсәтик: $1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \sin^2\frac{\alpha}{2} \leq \frac{3}{4}$.

Чыннан да, кабарынкы күпкырлы почмакта яссы почмаклар суммасы 360° ким булганлыктан, безнең очракта: $3\alpha = 360° \Rightarrow$ $\Rightarrow \alpha < 120° \Rightarrow \frac{\alpha}{2} < 60°$, моннан $\sin\frac{\alpha}{2} < \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin^2\frac{\alpha}{2} < \frac{3}{4}$.

Җавап. $l = 2\sqrt{1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

Икенче мәсьәлә. Шар секторын чикләүче конусның ян өслек мәйданы Q, сфера сегменты мәйданы S ка тигез. Бу шар секторының күләмен табыгыз.

Чишү. Мәсьәләнең шарты буенча, (5.1, 5.3) формулалары нигезендә, система табабыз:

$$\begin{cases} Q = \pi R\sqrt{2Rh - h^2} \\ S = 2\pi Rh \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q^2 = \pi^2 R^2\left(2Rh - h^2\right) \\ S = 2\pi Rh \end{cases}$$

биредә h — шар сегментының биеклеге (5.33 рәс.). Икенче тигезләмәдән h ны табып, беренче тигезләмәгә куябыз:

$Q^2 = \pi^2 R^2\left(\frac{S}{\pi} - \frac{S^2}{4\pi R^2}\right) = \pi\left(R^2 S - \frac{S^2}{4}\right) \Rightarrow R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4Q^2 + \pi S^2}{\pi S}}$. Моннан $V = S\frac{R}{3} = \frac{S}{6}\sqrt{\frac{4Q^2 + \pi S^2}{\pi S}}$.

Җавап. $V = \frac{S}{6}\sqrt{\frac{4Q^2 + \pi S^2}{\pi S}}$.

1. (5.2) формуласын чыгарыгыз.

2. Радиусы R булган шардан күчәр кисемендә α почмаклы сектор кисеп алынган. Бу секторның күләмен һәм тулы өслек мәйданын табыгыз.

3. Радиусы R булган шар сегментының тулы өслек мәйданы S булса, бу сегментның биеклеген табыгыз.

Җаваплар

2. $V = \frac{4\pi}{3} R^3 \sin^2 \frac{\alpha}{4}; \quad S = \pi R^2 \sin\frac{\alpha}{2}\left(2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4} + 1\right)$.

3. $h = 2R - \sqrt{4R^2 - S/\pi}$.

3. КҮПКЫРЛЫКЛАР ҺӘМ ӘЙЛӘНҮ ҖИСЕМНӘРЕНЕҢ КОМБИНАЦИЯЛӘРЕ

3.1. Күпкырлыкка камалган шар

Күпкырлыкның барлык кырлары да шарга орынса, ул *камалган шар* (яки шарны камаучы күпкырлык) дип атала. Билгеләмәдән күренгәнчә, камалган шарның үзәге күпкырлыкның барлык кырларыннан да тигез ераклыкта ята.

3.2. Пирамидага камалган шар

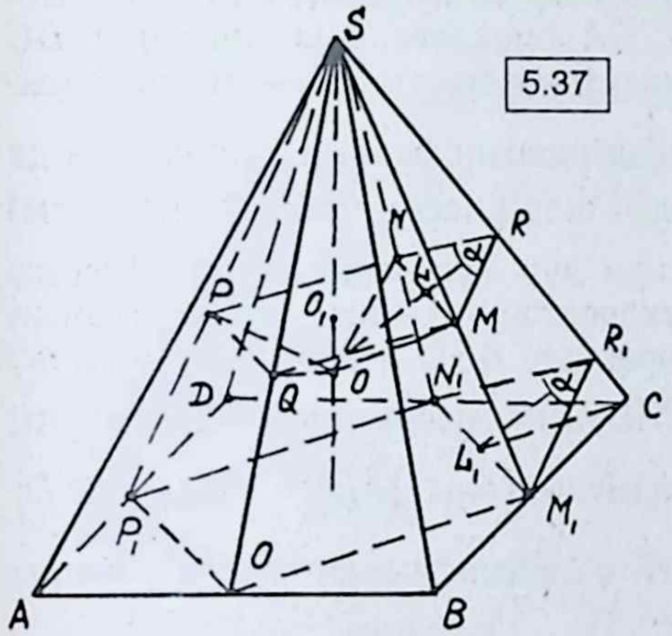
Шарны теләсә нинди өчпочмаклы пирамидага камау мөмкинлеге исбатланган. $n > 3$ булганда, n-почмаклы пирамидага шарны камау өчен ул пирамиданың төзеклеген таләп итү җитә (ләкин кирәкле түгел). Пирамида төзек булганда, камалган шарның үзәге пирамиданың биеклегендә ята.

Шуны әйтеп китик, мәсьәлә чишкәндә, сызымда шарның үзен сурәтләү мөһим түгел, аның үзәген, радиусын һәм пирамида кырларына орыну ноктaларын күрсәтү җитә. Типик мәсьәләләрне тикшерик.

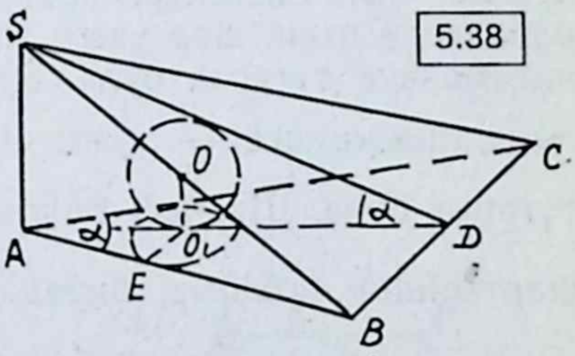
Беренче мәсьәлә. Дүртпочмаклы төзек пирамидага камалган шарның радиусы r. Бу пирамидада ике ян кыр арасындагы икекырлы почмак α га тигез. Түбәсе шар үзәгендә, ә нигез түбәләре шарның пирамида кырлары белән дүрт орыну ноктасында булган пирамиданың күләмен табыгыз.

Чишү. Эзли торган пирамиданың түбәсе шарның үзәгендә — O ноктасында һәм аның нигезе — $MNPQ$ квадраты (5.37 рәс.). OM һәм ON радиуслары аша яссылык үткәрәбез (R — яссылыкның SC

кабыргасы белән кисешү ноктасы), $N\hat{R}M = \alpha$ ның икекырлы почмакның сызыкча почмагы икәнен күрсәтик. Бу икекырлы почмак BSC һәм DSC ян кырлары белән барлыкка килгән. Әлеге яссылык, яссылыкларның перпендикулярлык билгесе нигезендә, BSC һәм DSC яссылыгына перпендикуляр була, чөнки ул OM һәм ON турылары аша үтә. Билгеле булганча, ике яссылык өченче яссылыкка перпендикуляр булса, ул яссылыкның кисешү турысы бу яссылыкка перпендикуляр була, нәтиҗәдә, SC кабыргасы OM һәм ON радиусы аша үткәргән яссылыкка перпендикуляр, шулай булгач, билгеләмә буенча, α почмагы без эзләгән сызыкча почмак була.



5.37



5.38

Хәзер $OMRN$ дүртпочмагын карыйк (аның квадрат икәне билгеле түгел). Шарт буенча $O\hat{M}R = O\hat{N}R = 90°$ нәтиҗәдә, $N\hat{O}M = 180° - \alpha$, шуңа күрә $|MN| = 2|LM| = 2|OM|\sin L\hat{O}M = 2r\sin\frac{180°-\alpha}{2} = 2r\cos\frac{\alpha}{2}$. OMO_1 өчпочмагыннан $\left(|O_1M| = \frac{|NM|}{\sqrt{2}}\right)$ табабыз: $|OO_1| = \sqrt{|OM|^2 - |O_1M|^2} = \sqrt{r^2 - 2r^2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = r\sqrt{-\cos\alpha}$.

Без эзли торган пирамиданың күләме:

$$V = \frac{1}{3}|NM|^2|OO_1| = \frac{4}{3}r^3\cos^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{-\cos\alpha}.$$

Искәрмә. $\cos\alpha < 0$ икәнен, ягъни почмагының җәенке булуын исбатларга кирәк. N_1M_1 кисемтәсе аша SC кабыргасына перпендикуляр итеп яссылык үткәрәбез. $N_1\hat{R}_1M_1 = N\hat{R}M = \alpha$ икәнен исбатлау авыр түгел (5.37 рәс.) $|L_1R_1| < |L_1C|$ булганлыктан, $\alpha > 90°$, чөнки

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{|N_1L_1|}{|R_1L_1|} > 1 \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} > 1 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} > 45^\circ \Rightarrow \alpha > 90^\circ$. Шуны исбатлау кирәк иде дә.

Икенче мәсьәлә. Пирамиданың низегендә тигезьянлы өчпочмак ята. Аның ян яклары арасындагы почмак α га, озынлыклары b га тигез. Өчпочмакның ян яклары аша үтүче пирамиданың ике кыры нигез яссылыгына перпендикуляр, ә өченчесе нигезгә α почмагы ясап авышкан. Бу пирамидага камалган шарның радиусын табыгыз.

Чишү. Шарт буенча $|AB| = |AC| = b$, $B\hat{A}C = \alpha$ (5.38 рәс.). ASB һәм ASC кырлары нигезгә перпендикуляр булганлыктан, SA кабыргасы пирамиданың биеклеге була. SA биеклеге аша нигезнең BC ягына перпендикуляр итеп яссылык үткәрәбез, (AD — нигез биеклеге); $A\hat{D}C = \alpha$. Камалган шар пирамиданың барлык кырларына да орынырга тиеш; ASD яссылыгы белән шар кисеме үзәге (O ноктасы) $\angle BAC$ ның биссектрисасында яткан зур түгәрәкне бирә. Нигезгә параллель итеп, шар үзәге аша үткәрелгән яссылык белән шарның кисеме зур түгәрәк була. Бу түгәрәкнең ABC өчпочмагы яссылыгына проекциясе — үзәге O_1 $\angle BAC$ ның биссектрисасында ятучы түгәрәк була. Шарның билгесез радиусы r ны $|AD| = |AO_1| + |O_1D|$ шартыннан табабыз, биредә $AДB$ өчпочмагыннан $|AD|$ табыла: $|AD| = b\cos\frac{\alpha}{2}$; AOE өчпочмагыннан: $|AO_1| = \frac{|O_1E|}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. $\triangle OO_1D$ дан $|O_1D| = |OO_1|\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

r ны табу өчен тигезләмә түбәндәге рәвешкә килә: $b\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{r\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{2r\cos^2\frac{\alpha}{4}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow r = \frac{b\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{4}}$.

Җавап. $r = b\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$.

Өченче мәсьәлә. Өчпочмаклы төзек кисек пирамидага камалган шарның өслек мәйданы белән, пирамиданың тулы өслек мәйданы $\pi : 6\sqrt{3}$ чагыштырмасында. Нигез яссылыгы белән ян кыр арасындагы икекырлы почмакны табыгыз.

Чишү. Без эзли торган α почмагы 5.39 рәсемендә сурәтләнгән ($СД$ — нигез биеклеге). Шарт буенча

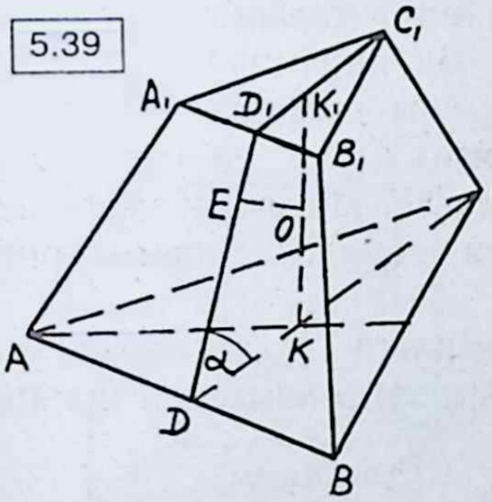
$$\frac{S_ш}{S_п} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}, \qquad (*)$$

биредә $S_ш$ — шарның өслек мәйданы, S_n— пирамиданың тулы өслек мәйданы. Билгеле булганча $S_ш = 4\pi r^2$, биредә r — шарның радиусы.

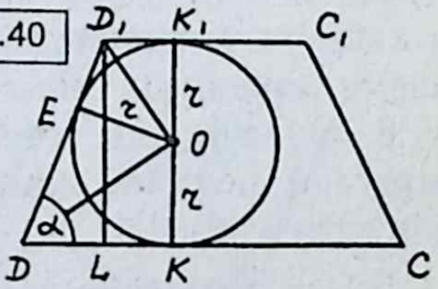
$$S_n = 3\frac{|AB|+|A_1B_1|}{2}|DD_1| + \frac{|AB|^2\sqrt{3}}{4} + \frac{|A_1B_1|^2\sqrt{3}}{4}.$$

$|AB|$ һәм $|A_1B_1|$ ны табыйк. 5.39 рәсеменнән $\frac{|AB|}{2} = |AD| = |DK|\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}|DK|$, биредә (5.40 рәс.) $|DK| = r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$; шуның өчен $|AB| = 2r\sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Шул ук рәвештә $\frac{|A_1B_1|}{2} = \sqrt{3}|D_1K_1|$; $D\hat{D_1}O = 180° - \alpha$ булганлыктан ΔOD_1K дан $|D_1K_1| = r\operatorname{ctg}\frac{\pi-\alpha}{2} = r\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ була. Нәтиҗәдә, $|A_1B_1| = 2\sqrt{3}r\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

5.39



5.40



ΔDD_1L дан $|DD_1| = \frac{|D_1L_1|}{\sin\alpha} = \frac{2r}{\sin\alpha}$ була; (*) тигезләмәсенә $|AB|$, $|A_1B_1|$, $|DD_1|$ не куеп табабыз:

$$\frac{4\pi r^2}{6\sqrt{3}r^2\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}+3\sqrt{3}r^2\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}},$$ яки, гади рәвешүзгәртүләрдән соң:

$$\frac{4}{\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{\cos^4\frac{\alpha}{2}+\sin^4\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{1+\cos^4\frac{\alpha}{2}+\sin^4\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 8\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2} =$$

$$= 1 + \left(\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Җавап. $\alpha = \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Үзлегеңнән чишү өчен мәсьәләләр

1. Биеклеге h, нигез янындагы икекырлы почмак 60° булган өчпочмаклы төзек пирамидага камалган шарның күләмен табыгыз.

2. Пирамиданың нигезендә кысынкы почмагы α булган ромб ята. Әгәр ян кырлар нигез яссылыгы белән бер үк икекырлы β почмагы ясасалар һәм пирамидага камалган шарның радиусы r булса, пирамиданың күләмен табыгыз.

3. Дүртпочмаклы төзек пирамидага камалган шар үзәге пирамиданың биеклеген, түбәдән башлап, $m:n$ чагыштырмасында бүлә. Чиктәш ян кырлар арасындагы почмакны табыгыз.

4. Дүртпочмаклы төзек пирамидага шар камалган. Шарның үзәгеннән пирамиданың түбәсенә кадәр ара a га, ә нигез янындагы икекырлы почмак α га тигез. Пирамиданың тулы өслек мәйданын табыгыз.

5. Дүртпочмаклы төзек пирамиданың түбәдәге яссы почмагы α. Әгәр камалган шарның радиусы R булса, пирамиданың ян өслек мәйданын табыгыз.

6. Дүртпочмаклы төзек пирамиданың нигез яклары a га, нигез янындагы икекырлы почмак α га тигез. Бу пирамидага камалган шар үзәгеннән ян кабыргага кадәр ераклыкны табыгыз.

7. Өчпочмаклы төзек пирамиданың нигез ягы a түбәдәге яссы почмак α га тигез. Пирамидага шар камалган. Нигезнең үзәге аша ян кабыргага перпендикуляр итеп үткәргән яссылык белән шарның киселе мәйданын табыгыз.

8. Өчпочмаклы төзек пирамиданың биеклеге H, ян кабыргалар нигезгә α почмагы ясап авышкан. Бу пирамидага камалган шарның радиусын табыгыз.

Җаваплар

1. $\frac{4\pi h^3}{81}$.
2. $\frac{4r^3 \operatorname{tg}\beta}{3\sin\alpha \operatorname{tg}^3\frac{\beta}{2}}$.
3. $\pi - \arccos\frac{n^2}{m^2}$.
4. $8a^2\cos\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.
5. $4R^2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.
6. $a\sqrt{2}\,\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}}{2\sqrt{1+\cos^2\alpha}}$.
7. $\frac{\pi a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)}{9\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{2}\right)}$.
8. $\frac{H}{4}\operatorname{ctg}^2\alpha\left(\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\alpha}-1\right)$.

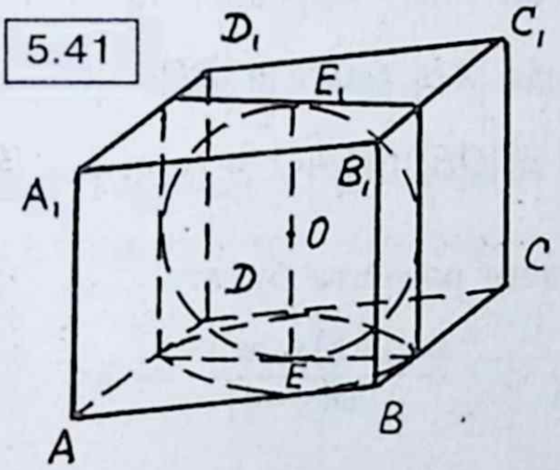
3.3. Призмага камалган шар

Инде исбатланганча, призмага шар камала алсын өчен, призманың перпендикуляр кисеменә әйләнә камап булу һәм бу әйләнәнең диаметры призманың биеклегенә тигез булу шартлары кирәк һәм шул җитә дә. Әгәр призма төзек булса, призманың биеклеге нигезгә камалган әйләнә диаметрына тигез булырга тиеш.

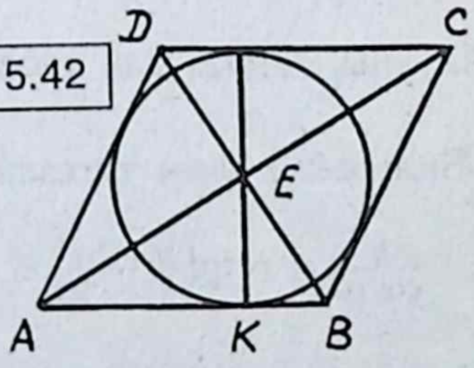
Беренче мәсьәлә. Шарны нигез диагональләре a һәм b булган туры параллелепипед камаган. Бу параллелепипедның күләмен табыгыз.

Чишү. Шарт буенча шар призманың барлык кырларына да орына, 5.41 рәсемендә күренгәнчә, E_1 — шарның $A_1B_1C_1Д_1$ кыры белән орыну ноктасы, E — $ABCД$ кыры белән. Бу нокталар үзәк аша үтүче бер турыда яталар, чөнки параллелепипед — туры, димәк, $H = 2r$ (r — шарның радиусы). Шар үзәге аша үтүче һәм нигезгә параллель яссылык белән шар кисеменең нигезгә проекциясе $ABCД$ параллеллограммына камалган радиуслы әйләнә була (5.42 рәс.). Дүртпочмакка түгәрәк камап булсын өчен бу дүртпочмакның капма-каршы яклары суммасы тигез булу кирәк. Шулай булгач, параллелограмм ромб яки квадрат булганда гына аңа камалган әйләнә төзеп була.

5.41



5.42



Әйтик, $|AC| = a$, $|BD| = b$ ди. Ул вакытта нигез мәйданы $S_H = \frac{a \cdot b}{2}$. Шарның радиусын $\triangle ABE$ дан табабыз: $|EK| = r = |AE| \sin E\hat{A}K = \frac{a}{2} \sin E\hat{A}K$, биредә $\sin E\hat{A}K = \frac{|BE|}{|AB|} = \frac{b/2}{\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $r = \frac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}$. Нәтиҗәдә, эзләнгән күләм: $V = \frac{ab}{2} H = abr = \frac{a^2b^2}{2\sqrt{a^2+b^2}}$.

Җавап. $V = \frac{a^2b^2}{2\sqrt{a^2+b^2}}$.

Искәрмә. Әгәр $a = b$ (ягъни параллелепипед — куб) булса $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. Моны турыдан-туры исәпләп тә табып була.

Икенче мәсьәлә. Нигезе турыпочмаклы өчпочмак булган туры призмага шар камалган. Нигезнең түбәсеннән гипотенузага төшергән биеклек h бер катет белән α почмагы төзи. Призманың күләмен табыгыз.

Чишү. Шарт буенча $A\hat{B}C = 90°$; $BD = h$, $A\hat{B}D = \alpha$ (5.43 рәс.). Призма туры булганлыктан, шар үзәгеннән нигез яссылыгына параллель итеп үткәргән яссылык белән шар кисеме $\triangle ABC$ га камалган түгәрәкне бирә. Нәтиҗәдә, бу түгәрәкнең радиусы шар радиусы R белән тигез, ягъни $R = r$.

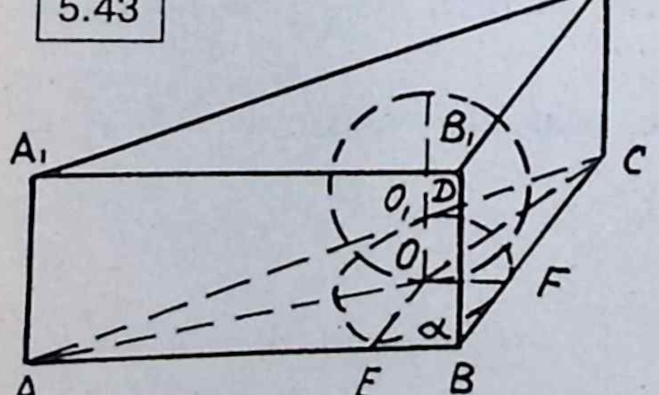
Призманың күләме $V = S_H \cdot H$. Нигез мәйданы җиңел табыла. ΔABD дан: $|AB| = \frac{h}{\cos\alpha}$, ΔABC дан: $|BC| = |AB|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{h}{\cos\alpha}\operatorname{ctg}\alpha = \frac{h}{\sin\alpha}$. Димәк, $S_H = \frac{1}{2}|AB|\cdot|BC| = \frac{h^2}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{h^2}{\sin 2\alpha}$. Призманың биеклеге $H = 2R = 2r$, биредә r ны $|AB| = |AE| + |BE|$ шартыннан табабыз. Биредә $|AB|$ билгеле $|BE| = |OF| = r$, ә $|AE|$ ны ΔAOE дан табабыз: $|AE| = |OE|\operatorname{ctg}E\hat{A}O = r\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$.

Билгесез r өчен тигезләмә түбәндәге рәвештә була:

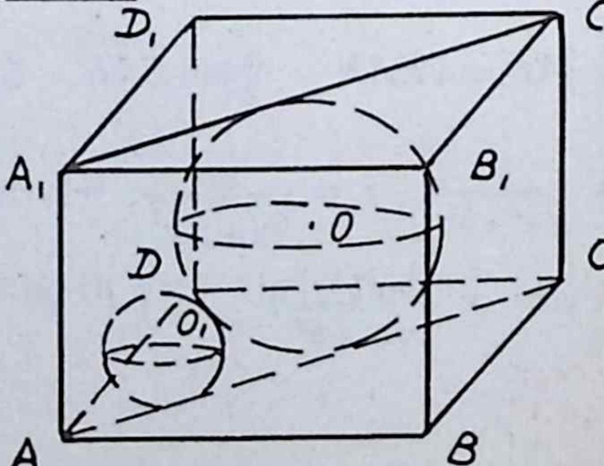
$$\frac{h}{\cos\alpha} = r\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) + r \Leftrightarrow \frac{h}{\cos\alpha} = r\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{h}{\cos\alpha} = r\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

5.43



5.44



(Биредә $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ формуласы файдаланылган.)

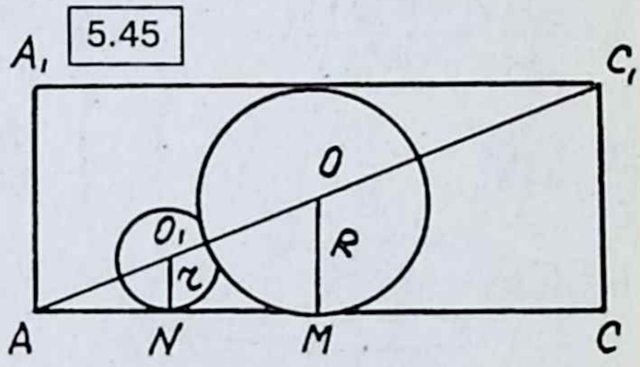
Шулай итеп, $r = \frac{h\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{2}\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Эзләнгән күләм: $V = S_H \cdot H = \frac{h^2}{\sin 2\alpha} \cdot \frac{2h\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{2}\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Җавап. $V = h^3\sqrt{2}\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin 2\alpha\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Өченче мәсьәлә. Кабыргасы a булган кубка шар камалган. Бу шарга һәм кубның өч кырына орынучы икенче шарның радиусын табыгыз (5.44 рәс.).

Чишү. Диагональ кисеме 5.45 рәсемендә сурәтләнгән (кечкенә шарның үзәге кубның диагоналендә ятуын исбатлагыз). $\Delta AO_1M \sim \Delta AOM$ булганлыктан: $\frac{|AO|}{|OM|} = \frac{|AO_1|}{|O_1N|}$, биредә $|AO| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $|OM| = R = \frac{a}{2}$,



$|O_1N| = r$, $|AO_1| = |AO| - (r+R) = \frac{a\sqrt{2}}{2} - r - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\left(\sqrt{2}-1\right) - r$.

Билгесез r ны табу өчен тигезләмә:

$$\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{a\left(\sqrt{2}-1\right)\frac{1}{2} - r}{r} \Rightarrow r = \frac{a}{2}\,\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}.$$

Җавап. $r = \frac{a\left(3-2\sqrt{2}\right)}{2}$.

Үзлегеңнән чишү өчен мәсьәләләр

1. Призманың нигезендә бер катеты a һәм аңа каршы ятучы почмагы α, булган турыпочмаклы өчпочмак ята. Аңа камалган шарның күләмен табыгыз.

2. Нигезендә мәйданы S, түбә почмагы α булган тигезьянлы өчпочмак яткан туры призмага шар камалган. Шарның өслек мәйданын табыгыз.

3. Параллель яклары a һәм $в$ булган турыпочмаклы трапеция туры призманың нигезендә ята. Әгәр бу призмага сфера камалган булса, призманың күләмен табыгыз.

4. Өчпочмаклы төзек призмага шар камалган. Шарның өслек мәйданы белән призманың тулы өслек мәйданы чагыштырмасын табыгыз.

5. Радиусы R булган шарны алтыпочмаклы төзек призма камаган. Бу призманың тулы өслек мәйданын табыгыз.

6. Нигез диагональләре a һәм $в$ булган туры параллелепипедка шар камалган. Бу параллелепипедның тулы өслек мәйданың табыгыз.

7. Өчпочмаклы туры призманың нигезендә түбә почмагы 2α булган тигезьянлы өчпочмак ята. Нигезнең тигез булмаган ягы һәм өске нигезнең аңа каршы ятучы түбәсе аша яссылык үткәреп, призмадан пирамида кисеп алынган, ә калган өлешенә радиусы r булган шар камалган. Призманың күләмен табыгыз.

Җаваплар

1. $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}\frac{a^3\cos^3\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^3\frac{\alpha}{2}}$.
2. $\frac{2\pi S\sin\alpha}{\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}$.
3. $\frac{2a^2b^2}{a+b}$.
4. $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$.
5. $12\sqrt{3}R^2$.
6. $3ab$.
7. $V=\frac{r^3 ctg^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)ctg\alpha}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}$.

3.4. Шарга камалган күпкырлык

Әгәр күпкырлыкның барлык түбәләре дә шар өслеген дә ятса, ул шарга камалган күпкырлык (яки күпкырлыкны камаучы шар) дип атала. Димәк, шарның үзәге күпкырлыкның түбәләреннән тигез ераклыкта ята. Бу үзәк күпкырлыкның эчендә, тышында, я берәр кыры өстендә ятарга мөмкин. Әгәр күпкырлык шар белән камалса, ул вакытта бу күпкырлыкның һәр кырын әйләнә белән камап була, чөнки шарның кыр яссылыгы белән киселеме — түгәрәк, һәм бу түгәрәкнең әйләнәсенә әлеге кыр камалган була.

Шулай итеп, түбәндәге нәтиҗәләрне ясарга була:

1. Әгәр шар параллелепипедны камаса, ул вакытта параллелепипедның барлык кырлары турыпочмаклыклар, ягъни параллелепипед — турыпочмаклы, ә шарның үзәге диагональләр кисешү ноктасында ята.

2. Әгәр шар призманы камаса, ул призма — туры призма, ә нигезләре — әйләнә камый алырлык күппочмаклар булалар.

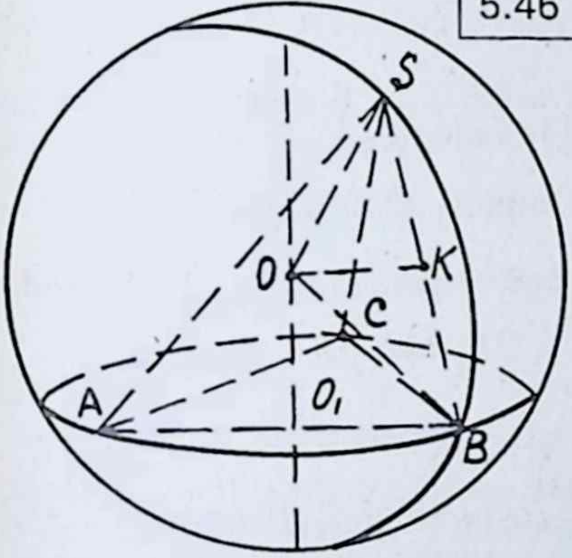
3. Әгәр шар пирамиданы камаса, ул вакытта шарның үзәге нигезне камаучы түгәрәкнең үзәге аша үтүче перпендикуляр белән ян кабырга уртасы аша үтүче перпендикуляр яссылык кисешкән ноктада ята (5.46 рәс.). Чыннан да, O — шарның үзәге, O_1 — $\triangle ABC$ камаучы әйләнә үзәге булсын, $|OS|=|OB|$ булганлыктан, $OK\perp OS$,

$|BK| = |KS|$. *OK перпендикуляры K* ноктасы аша BS кабыргасына перпендикуляр яссылыкта ята. Икенче яктан, шарның радиусы, $\triangle ABS$ яссылыгына перпендикуляр һәм O_1 ноктасы аша үтә.

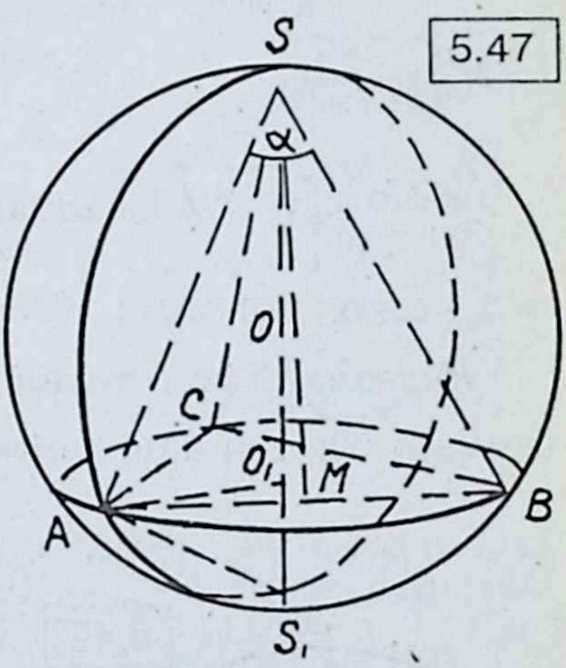
Аерым алганда, әгәр шар төзек пирамиданы камаса, ул вакытта шарның үзәге пирамиданың биеклегендә яки аның дәвамында ята.

Искәрмә. Әгәр мәсьәләнең шарты буенча күпкырлыкны, үзәге күпкырлыкның эчендә, тышында яки өслегендә ятарлык шар белән камап булса, беренче я икенче очрак кына карала, шар үзәгенең күпкырлык өстендә булуы очраклы хәл дип исәпләнә.

5.46



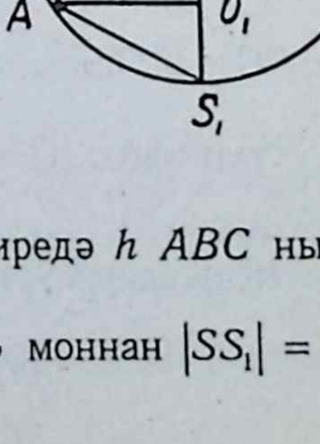
5.47



Беренче мәсьәлә. Өчпочмаклы төзек пирамидада түбәдәге яссы почмак α га, ә пирамида биеклеге H ка тигез. Бу пирамиданы камаучы шарның радиусын табыгыз (5.47 рәс.).

Чишү. Беренче юл. Әйтик, шарның үзәге пирамиданың эчендә ята. Мәсьәләнең шарты буенча $\triangle ABC$ — тигезьяклы, шарның үзәге O пирамиданың SO_1 биеклегендә ята. $|SO_1| = H$, $A\hat{S}B = B\hat{S}C = C\hat{S}A = \alpha$, O_1 ABC ны камаучы әйләнә үзәге. Пирамиданың A түбәсен S_1 ноктасы белән тоташтырабыз, биредә SS_1 — шарның диаметры һәм $\triangle ASS_1$ карыйк (5.47, 5.48 рәс.). Бу өчпочмак — турыпочмаклы, чөнки $\angle S_1AS$ диаметрга таяна һәм $|SO_1| = H$, $|AO_1| = \frac{2}{3}h$, биредә h ABC ның биеклеге. $\triangle ASS_1 \sim \triangle AO_1S$ шунлыктан $\frac{|O_1S|}{|AS|} = \frac{|AS|}{|SS_1|}$, моннан $|SS_1| = 2R =$

5.48

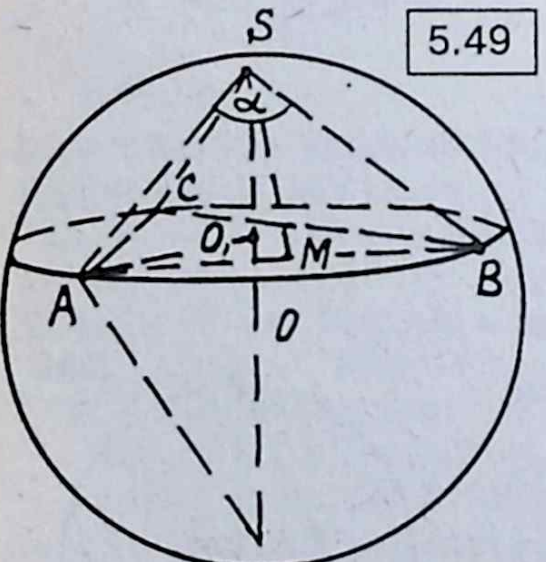


$= \frac{|AS|^2}{|SO_1|}$, (R — шарның радиусы). Димәк, R ны табу өчен пирамиданың ян кабыргасы озынлыгын табарга кирәк. $|AB| = |BC| = |AC| = a$ булса, $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (тигезьянлы өчпочмак биеклеге), һәм турыпочмаклы $\triangle AMS$ тан $|AS| = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. Нәтиҗәдә, $\triangle AO_1S$ тан $|SO_1|^2 = |AS|^2 - |AO_1|^2$ яки $H^2 = \frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{a^2}{3}$. Моннан $a^2 = \frac{12H^2\sin^2\alpha/2}{3-4\sin^2\alpha/2}$, $|AS| = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = H\sqrt{\frac{2}{3-4\sin\frac{\alpha}{2}}}$.

$2R = \frac{|AS|^2}{|SO_1|}$ булганлыктан: $R = \frac{H^2}{2}\frac{3}{\left(3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}\cdot\frac{1}{H}$. Әгәр $\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1-\cos\alpha$ дип алсак, $R = \frac{3H}{2+4\cos\alpha}$, биредә $0 < \alpha < \frac{2\pi}{3}$.

Искәрмә. Төзек пирамиданың түбә янындагы яссы почмаклар суммасы 2π дән ким, димәк, $0 < 3\alpha < 2\pi$ һәм $0 < \alpha < \frac{2\pi}{3}$.

Җавап. $R = \frac{3H}{2+4\cos\alpha}$.



5.49

Чишү. Икенче юл. Шарның үзәге O пирамидасының тышында дип фараз итик (5.49 рәс.). Пирамида төзек булганлыктан, шарның үзәге O пирамида биеклегенең дәвамында ята. $\triangle ABC$ тигезьянлы булганлыктан, пирамиданың ян кырлары — тигезьянлы өчпочмаклар, $|SO_1| = H$, $A\hat{S}B = B\hat{S}C = C\hat{S}A = \alpha$, O_1 — $\triangle ABC$ ны камаучы әйләнә үзәге. Үткән очрактагы кебек $|AB| = |BC| = |CA| = a$ дип фараз итик, ул вакытта $\triangle ABC$ның биеклеге $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AO_1 = \frac{2h}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Турыпочмаклы $\triangle AMS$ тан табабыз: $|AS| = \frac{|AM|}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$.

A түбәсен S_1 ноктасы белән тоташтырабыз SS_1— шарның диаметры. Шарның SS_1A өчпочмагы яссылыгы белән кисемен карыйк (5.50 рәс.). $\triangle AO_1S \sim \triangle ASS_1$, шунлыктан $\frac{|SO_1|}{|AS|} = \frac{|AS|}{|SS_1|}$. Ул чакта $|SS_1| =$

$= 2R = \dfrac{|AS|^2}{|SO_1|}$. $\triangle AO_1S$ тан табабыз: $|SO_1|^2 = |AS|^2 - |AO_1|^2$ яки $H^2 =$

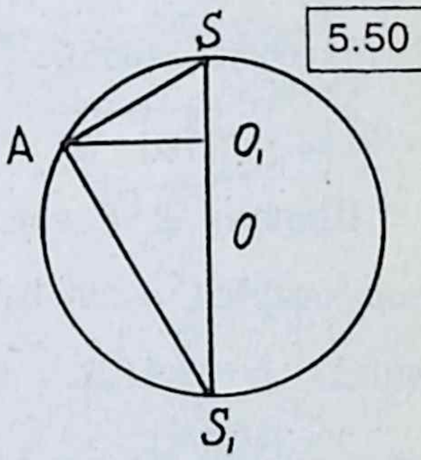
$= \dfrac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} - \dfrac{a^2}{3}$, $a^2 = \dfrac{12H^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}}{2+4\cos\alpha}$.

$2R = \dfrac{|AS|^2}{|SO_1|}$ булганлыктан: $R = \dfrac{3H}{2+4\cos\alpha}$.

Җавап. $R = \dfrac{3H}{2+4\cos\alpha}$.

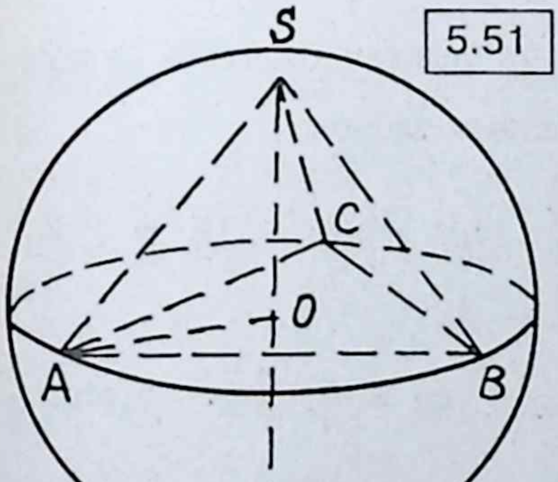
Шарның үзәге пирамиданың нигезендә яту очрагы бу мәсьәлә өчен аерым очрак була (5.51 рәс.). Бу очракта $|AO| = |SO| = R$, моннан $R = H$ һәм α билгеле бер санлы кыйммәт ала, бу кыйммәтне 5.51 рәсеменнән, я элекке җаваптан, $R = H$ дип табып була: $H = \dfrac{3H}{2+4\cos\alpha}$. Моннан $\cos\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \alpha =$ $= \arccos\frac{1}{4}$.

5.50

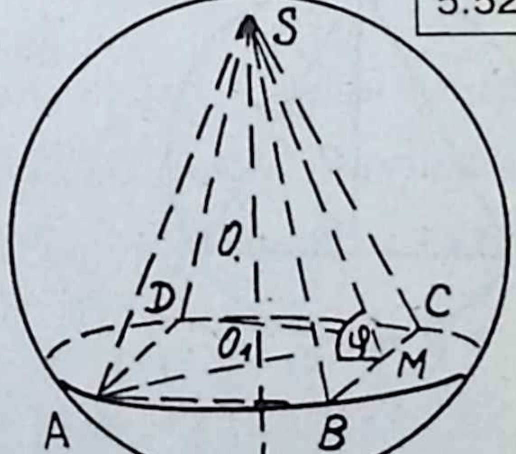


Икенче мәсьәлә. Дүртпочмаклы төзек пирамиданы камаган шар радиусының нигез ягына чагыштырмасы — 3 : 4. Нигез янындагы икекырлы почмакны табыгыз (5.52 рәс.).

5.51



5.52

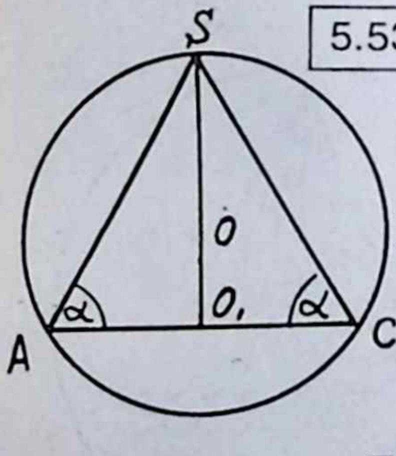


Чишү. **1.** Шарның үзәге пирамиданың эчендә дип фараз итик. Мәсьәләнең шарты буенча $ABCДS$ — төзек пирамида, димәк, $ABCД$ — квадрат, шарның үзәге O пирамиданың SO_1 биеклегендә ята. Әйтик; шарның радиусы R пирамиданың нигез ягы a га тигез. Ул вакытта, шарт буенча $\frac{R}{a} = \frac{3}{a}$ яки $R = \frac{3}{4}a$. Сызыкча почмак O_1MS — эзли

торган икекырлы почмакка тиңдәш. Бу сызыкча почмак пирамиданың биеклеге аша BC кабыргасына перпендикуляр итеп үткәргән яссылыкта ята. Эзли торган почмакны φ аша тамгалыйк, ягъни $O_1\hat{M}S = \varphi$. φ почмагын табу өчен шарның радиусы R ны a һәм φ аша табыйк. $\triangle SO_1M$ нан (5.52 рәс.) табабыз: $|SO_1| = |O_1M|\text{tg}\varphi = \frac{|AB|}{2}\text{tg}\varphi = \frac{a}{2}\text{tg}\varphi$. $ABCД$ квадратыннан табабыз: $|AO_1| = |AB|\frac{\sqrt{2}}{2} = a\frac{\sqrt{2}}{2}$. Турыпочмаклы $\triangle AO_1S$ тан (5.52, 5.53 рәс.) ян кабырганың озынлыгын табабыз: $|AS|^2 = |SO_1|^2 + |AO_1|^2 = \frac{a^2}{4}\text{tg}^2\varphi + \frac{2a^2}{4} = \frac{a^2}{4}\left(2 + \text{tg}^2\varphi\right)$.

Шарның ASC өчпочмагы яссылыгы белән кисемен карыйк. Тигезьянлы ASC өчпочмагына синус теоремасын кулланабыз: $\frac{|AS|}{\sin\alpha} = 2R$, биредә $\alpha = A\hat{C}S = C\hat{A}S$. Турыпочмаклы SO_1A өчпочмагыннан $\sin\alpha = \frac{|SO_1|}{|AS|}$. Соңгы нәтиҗәне $2R = \frac{|AS|}{\sin\alpha}$ аңлатмасына куеп, табабыз:

$$R = \frac{1}{2}\frac{|AS|^2}{|SO_1|} = \frac{1}{2}\frac{a^2\left(2+\text{tg}^2\varphi\right)}{4\cdot\frac{a}{2}\text{tg}\varphi} = \frac{a\left(2+\text{tg}^2\varphi\right)}{4\text{tg}\varphi}.$$



5.53

$R = \frac{3}{4}a$ булганлыктан, билгесез φ почмагы өчен тигезләмә табабыз:

$\frac{3}{4}a = \frac{a\left(2+\text{tg}^2\varphi\right)}{4\text{tg}\varphi}$ яки $3\text{tg}\varphi = \text{tg}^2\varphi + 2$.

Моннан $\text{tg}\varphi_1 = 1$; $\text{tg}\varphi_2 = 2$.

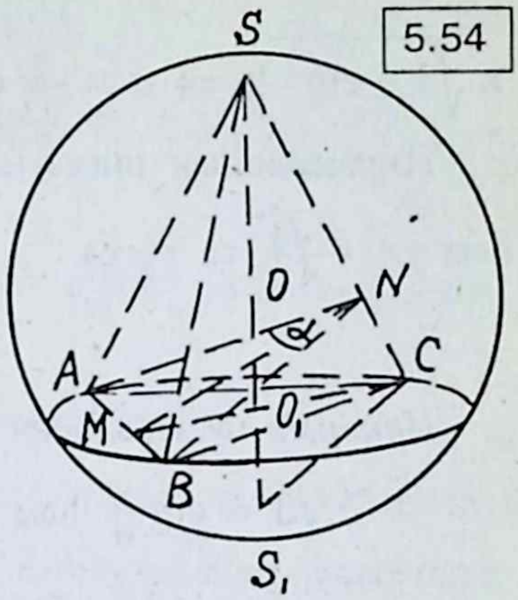
Җавап. $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$, $\varphi_2 = \text{arctg}2$.

2. $|O_1B| = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot |O_1S| = H$ дип фараз итик. Турыпочмаклы $\triangle SBS_1$ дә биеклек $|O_1B|$ урта пропорциональ зурлык була (гипотенузаларның кисемтәләре арасында). Димәк $\frac{a^2}{2} = (2R - H)H = \left(\frac{3a}{2} - H\right)H$. Моннан $H_2 = a$, $H_1 = \frac{a}{2}$. Димәк, $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$, $\text{tg}\varphi_2 = \frac{H}{\frac{a}{2}} = 2$, $\varphi_2 = \text{arctg}2$.

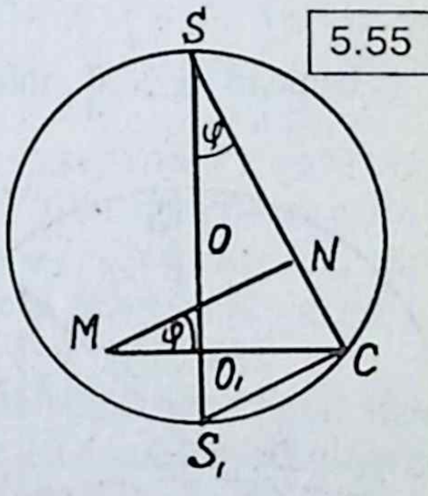
Җавап. $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$, $t_2 = \text{arctg}2$.

Өченче мәсьәлә. Күләме V булган шарга өчпочмаклы төзек пирамида камалган. Әгәр ян кырлар арасындагы икекырлы почмаклар α га тигез булса, пирамиданың нигез мәйданын табыгыз.

Чишү. Мәсьәләнең шарты буенча шарның күләме V, димәк, шарның радиусын $V = \frac{4\pi}{3}R^3$ формуласы аша тапсак, $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$ була. $ABCS$ — төзек пирамида, димәк, $\triangle ABC$ — тигезьяклы, ABC өчпочмагы үзәге O_1 һәм шар үзәге O пирамиданың SO_1 биеклегендә (яки аның дәвамында) яталар. Ян кырларның икекырлы почмагына тиндәш сызыкча почмакны табу өчен, AB кабыргасы аша SC кабыргасына перпендикуляр итеп яссылык үткәрәбез (5.54 рәс.). Кисемдә тигезьянлы ΔABN, мәсьәләнең шарты буенча $A\hat{N}B = \alpha$. ABC өчпочмагының мәйданын табу өчен аның ягы озынлыгын табабыз. Әйтик, $|AB| = |BC| = |CA| = a$, ул чакта $AM = \frac{a}{2}$, $|MC| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $|O_1C| = \frac{2}{3} \times$ $\times |MC| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. ΔANB да $|NM| = |AM| \times$ $\times \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2}ctg\frac{\alpha}{2}$. S_1 ноктасын пирамида түбәсе C, белән тоташтырабыз һәм ике охшаш өчпочмакны ($\triangle SS_1C \infty \triangle MNC$) карыйбыз (5.54, 5.55 рәс.). Өстәмә почмак кертәбез: $\varphi = N\hat{M}C = O\hat{S_1}C$ $(0 < \varphi < \frac{\pi}{2})$.



5.54



5.55

$$\Delta MNC \text{ дан: } \cos\varphi = \frac{|MN|}{|MC|} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}, \ \sin\varphi = \sqrt{\frac{3-\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}{3}},$$

$$\Delta SS_1C \text{ дан: } |SC| = |SS_1|\cos\varphi = 2R\frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}},$$

$$\Delta SO_1C \text{ дан: } |O_1C| = |SC|\sin\varphi = \frac{2R}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{3-\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}{3}}.$$

Соңгы аңлатманы билгесез a ны табу өчен үзгәртәбез:

$|O_1C| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$ булганлыктан, $\frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} \times$

$\times\sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}\sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

Пирамиданың нигез мәйдагы — тигезьяклы өчпочмак мәйданы һәм ул $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ га тигез.

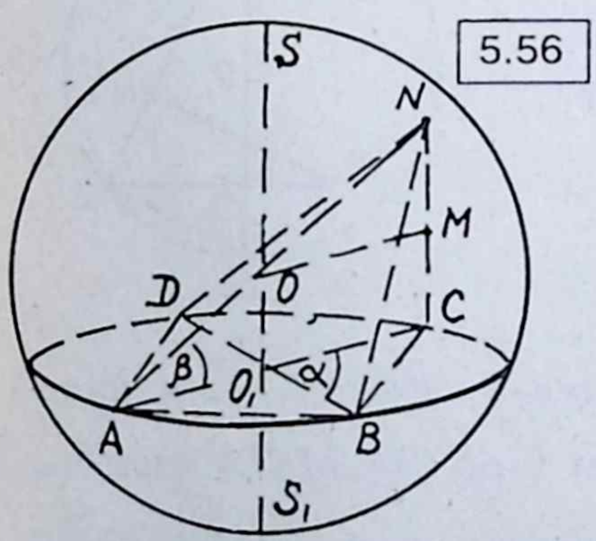
Җавап. $Q = \sqrt{3}\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\left(3 - \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt[3]{\frac{9V^2}{16\pi^2}}$.

Искәрмә. Мәсьәләнең җавабын болай үзгәртеп була:

$$\sqrt{3} = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} \text{ һәм } 3 - \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} = \operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{6} - \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} =$$

$$= \frac{\cos^2\frac{\pi}{6}\sin^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\pi}{6}}{\sin^2\frac{\pi}{6}\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Биредә $\alpha > \frac{\pi}{3}$ икәне сызымнан ачык күренә.



Дүртенче мәсьәлә. Пирамиданың нигезендә диагональләре арасында α почмагы булган турыпочмаклык ята. Бер ян кабырга нигез яссылыгына перпендикуляр, ә ян кабыргаларның иң зурысы нигез яссылыгына β почмагы ясап авышкан. Бу пирамиданы камаучы шарның радиусы R булса, пирамиданың күләмен табыгыз.

Чишү. Мәсьәләнең шарты буенча $ABCД$ — турыпочмаклык, $B\hat{O_1}C = \alpha$, NC перпендикуляр ян кабырга. $N\hat{A}C = \beta$ (5.56 рәс.). Мәсьәләне чишү өчен камаучы шарның үзәге кайда урнашуын табу кирәк. Диагональләр кисешү ноктасы O_1 аша $ABCД$ яссылыгына перпендикуляр итеп SS_1 кисемтәсен үткәрәбез. OO_1 кисемтәсе турыпочмаклы $\triangle ACN$ ның урта сызыгы була, чөнки $|AO_1| = |O_1C|$ һәм $SS_1 \parallel NC$. NC кабыргасының уртасы (M ноктасы) аша бу кабыргага перпендикуляр яссылык үткәрәбез, бу яссылык SS_1 кисемтәсен O ноктасында кисә. (MO — $\triangle ANC$ ның урта сызыгы.) Шулай итеп, O — шар үзәге һәм AN кабыргасының уртасы, $|AO| = |ON| = R$. $\triangle AO_1O$ дан табабыз: $|AO_1| = |AO|\cos\beta = R\cos\beta$,

$|OO_1| = R\sin\beta$. Пирамиданың биеклеге $|NC| = 2|OO_1| = 2R\sin\beta$.

Нигез мәйданы $S_H = \frac{1}{2}|AC|^2 \sin\alpha = \frac{1}{2} + \left(2|AO_1|^2\right)\sin\alpha = 2R^2\cos^2\beta \times$

$\times\sin\alpha$. Нәтиҗәдә, пирамиданың күләме $V = \frac{1}{3}S_H \cdot |NC| =$

$= \frac{1}{3}2R^2\cos^2\beta\sin\alpha\, 2R\sin\beta$.

Җавап. $V = \frac{2}{3}R^3\sin 2\beta\cos\beta\sin\alpha$.

Үзлегеңнән чишү өчен мәсьәләләр

1. Өчпочмаклы төзек пирамиданың биеклеге белән ян кабыргасы арасындагы почмак α га тигез ($\alpha < \frac{\pi}{4}$). Камаучы шар үзәге пирамиданың биеклеген нинди чагыштырмада бүлә?

2. Дүртпочмаклы төзек пирамиданың нигез ягы a га тигез, ян кабыргалар нигезгә α почмагы ясап авышкан. Камаучы шарның радиусын табыгыз.

3. Өчпочмаклы пирамиданың ике ян кыры үзара тигез, катетлары уртак булган турыпочмаклы өчпочмаклар. Уртак катетның озынлыгы l га, һәм аның янындагы икекырлы почмак α га тигез. Пирамиданың калган ике кыры арасындагы икекырлы почмак β га тигез булса, бу пирамиданы камаган шарның радиусын табыгыз.

4. Өчпочмаклы пирамиданың ян кабыргасы һәм нигезенең ике ягы бер үк a зурлыгында. Әгәр нигезнең тигез яклар арасындагы почмагы α булса, камалган шарның радиусын табыгыз.

5. Дүртпочмаклы төзек пирамиданың ике эргәдәш ян кырлардагы икекырлы почмак α га тигез. Пирамиданың биеклеге H булса, камалган шарның радиусын табыгыз.

6. Пирамиданың нигезендә диагональләре α почмагы ясап кисешкән турыпочмаклык ята. Бу пирамида R радиуслы сфера белән камалган. Әгәр пирамиданың ян кабыргалары нигез яссылыгы белән бер үк β почмагы ясасалар, пирамиданың күләмен табыгыз.

7. Радиусы R булган сферага нигезендәге икекырлы почмак α булган өчпочмаклы төзек пирамида камалган. Бу пирамиданың нигез һәм ян кабыргалар озынлыгын табыгыз.

8. Өчпочмаклы $SABC$ пирамидасында BC кабыргасы a га тигез. $|AB| = |AC|$, SA кабыргасы нигез яссылыгына перпендикуляр урнашкан SA кабыргасы янындагы икекырлы почмак α га, ә BC кабыргасы янындагысы β га тигез. Камалган шарның радиусын табыгыз.

1. $\cos 2\alpha$.
2. $\frac{a(3+\cos 2\alpha)}{4\sin 2\alpha}$.
3. $\frac{l}{2}\sqrt{1+\frac{\mathrm{ctg}^2\beta}{\cos^4\frac{\alpha}{2}}}$.
4. $\frac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sqrt{\frac{3}{4}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$.
5. $\frac{H}{2}\cdot \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}$.
6. $\frac{4}{3}R^3\sin^2 2\beta\sin^2\beta\sin\alpha$.
7. $\frac{4R\sqrt{3}\mathrm{tg}\alpha}{4+\mathrm{tg}^2\alpha}$; $\frac{2R\sin\alpha}{1+3\cos^2\alpha}$.
8. $\frac{a}{2\sin\alpha}\sqrt{1+\cos^4\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\beta}$.

3.5. Конус эченә камалган пирамида

Әгәр конус белән пирамиданың түбәләре уртак булып, конусның нигезе пирамида нигезен камаса, ул конуска камалган пирамида (пирамиданы камаучы конус) дип атала. Бу очракта пирамида һәм конусның биеклекләре тәңгәл килә, пирамиданың ян кабыргалары конусның төзүчеләре булып тора.

Беренче мәсьәлә. Конусның күләме V га тигез. Конуска пирамида камалган. Бу пирамиданың нигезендә түбәсе α булган тигезьянлы өчпочмак ята. Пирамиданың күләмен табыгыз.

Чишү. Мәсьәләнең шарты буенча $|AC| = |BC|$, $A\hat{C}B = \alpha$ (5.57 рәс.), конусның күләме V га тигез. Конусның күләмен исәпләү формуласы буенча $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, биредә R — конус нигезенең радиусы, H — конус биеклеге. Бу тигезлектән $R^2H = \frac{3V}{\pi}$ икәнен табабыз. Пирамиданың нигез мәйданың R аша табабыз: $|BC| = |AC| = a$ дип алып, синус теоремасы буенча:

$$\frac{a}{\sin C\hat{A}B} = 2R \Rightarrow a = 2R\sin C\hat{A}B = 2R\sin\frac{\pi-\alpha}{2} = 2R\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Пирамиданың нигез мәйданы:

$$S_H = \frac{1}{2}|AC||BC|\sin\alpha = \frac{1}{2}a^2\sin\alpha = 2R^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha.$$

Пирамиданың күләме:

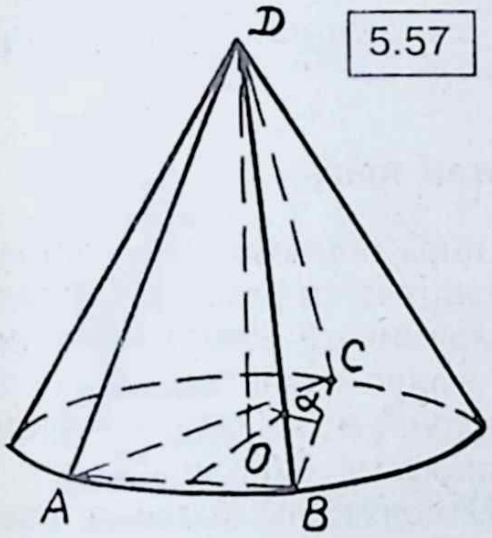
$$V_n = \frac{1}{3}S_H H = \frac{2}{3}R^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\cdot H = \frac{2}{3}R^2H\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha.$$

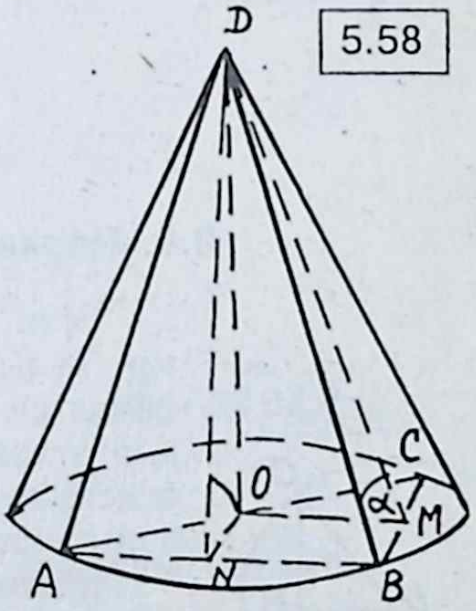
Бу аңлатмада R^2H ны $\frac{3V}{\pi}$ гә алыштырып, табабыз:

$$V = \frac{2}{3}\frac{3V}{\pi}\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha = \frac{2}{\pi}V\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha.$$

Җавап. $\frac{2}{\pi}V\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha.$

Икенче мәсьәлә. Конуска нигезендә турыпочмаклы өчпочмак яткан пирамида камалган. Пирамиданың катетлар аша үтүче ян кырлары нигез яссылыгына тиңдәш рәвештә α һәм β почмаклары ясап авышканнар. Пирамида күләменә конус күләменә чагыштырмасын табыгыз (5.58 рәс.).





Чишү. Мәсьәләнең шарты буенча $\triangle ABC$ — турыпочмаклы, димәк, AC гипотенузасы конус нигезендәге әйләнәнең диаметры була. AB һәм BC катетларындагы икекырлы почмакларның сызыкча почмакларын төзү өчен $OД$ биеклеге аша бу катетларга перпендикуляр итеп ике яссылык үткәрәбез. $OMД$ һәм OND почмакларын табабыз. Мәсьәләнең шарты буенча $O\hat{M}D = \alpha$ һәм $O\hat{N}D = \beta$. Пирамида күләме — $V_n = \frac{1}{3}SH$, конус күләме — $V_k = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, биредә H — конус белән пирамиданың уртак биеклеге, S — пирамиданың нигез мәйданы, R — конусның нигез радиусы. $\frac{V_n}{V_k}$ чагыштырмасы $\frac{S}{\pi R^2}$ дигән сүз, димәк, бу чагыштырманы табу өчен нигез мәйданы S ны R аша табу кирәк. Әйтик, $|OM| = a$, $|ON| = b$, ул чакта турыпочмаклы $OMД$ һәм OND өчпочмакларыннан: $|OD| = H = a\operatorname{tg}\alpha = b\operatorname{tg}\beta$. Төзү буенча $|OM| = a = \frac{1}{2}|AB|$; $|ON| = b = \frac{1}{2}|CB|$ (урта сызыкның

үзлеге), димәк, $S = \frac{1}{2}|AB||BC| = \frac{1}{2}2a \cdot 2b = 2ab$ (5.59 рәс.). R аша a һәм b ны табу өчен $a^2 + b^2 = |OB|^2 = R^2$ тигезлеген кулланабыз. Бу соңгы тигезлекне $a\text{tg}\alpha = b\text{tg}\beta$ тигезләмәсе белән карап, билгесез a һәм b аны табабыз:

$$a = \frac{R\text{tg}\beta}{\sqrt{\text{tg}^2\alpha + \text{tg}^2\beta}}, \qquad b = \frac{R\text{tg}\alpha}{\sqrt{\text{tg}^2\alpha + \text{tg}^2\beta}}.$$

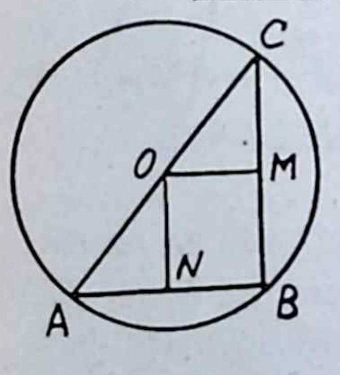
Нәтиҗәдә,

$$S = 2ab = 2\frac{R^2\text{tg}\alpha\text{tg}\beta}{\text{tg}^2\alpha + \text{tg}^2\beta}, \qquad \frac{V_n}{V_k} = \frac{2R^2\text{tg}\alpha\text{tg}\beta}{\pi R^2(\text{tg}^2\alpha + \text{tg}^2\beta)}.$$

Җавап. $\frac{2\text{tg}\alpha\text{tg}\beta}{\pi(\text{tg}^2\alpha + \text{tg}^2\beta)}$.

3.6. Пирамидага камалган конус

5.59



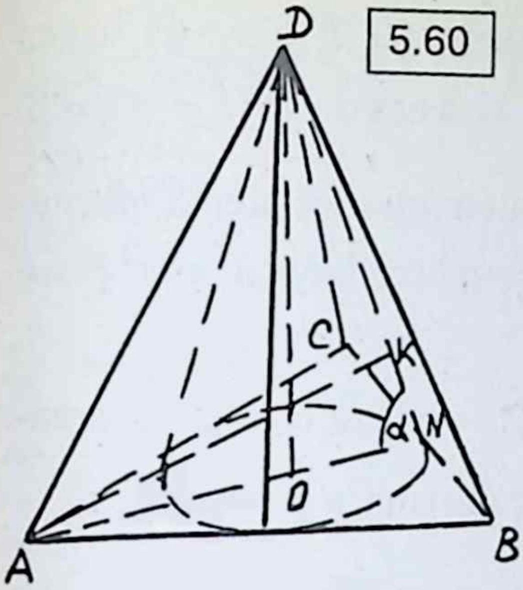
Әгәр конус белән пирамиданың түбәләре уртак булып, конусның нигезе пирамида нигезенә камалган булса, ул пирамидага камалган конус дип атала. Бу очракта конус белән пирамида биеклеге тәңгәл килә, ә конусның ян өслеге пирамиданың ян кырларына апофема буйлап орына.

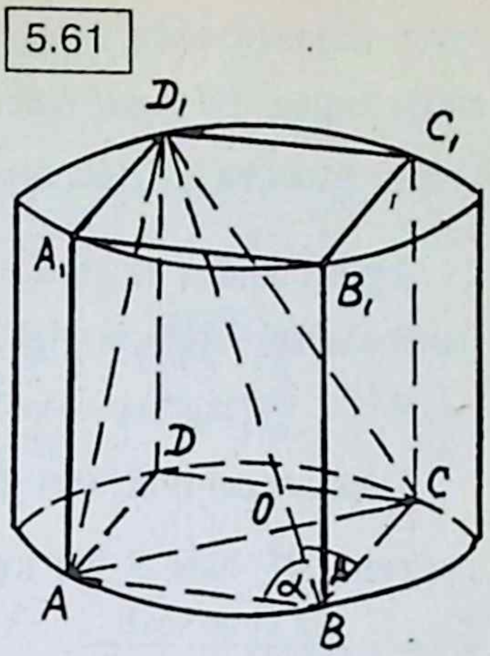
Өченче мәсьәлә. Өчпочмаклы төзек пирамидада нигез түбәсеннән каршы ятучы ян кырга кадәр ераклык l га тигез. Ян кырлар нигез яссылыгына α почмагы ясап авышкан булса, бу пирамидага камалган конусның тулы өслек мәйданын табыгыз.

Чишү. Мәсьәләнең шарты буенча (5.60 рәс.). $A\hat{N}D = \alpha$, $|AK| = l$, DN — пирамиданың апофемасы һәм конусның төзүчесе. Турыпочмаклы ΔANK да $|AN| = \frac{|AK|}{\sin\alpha} = \frac{l}{\sin\alpha}$. ΔABC тигезьяклы булганлыктан O бу өчпочмакның үзәге һәм $|ON| = \frac{1}{3}|AN| = \frac{l}{3\sin\alpha}$. Турыпочмаклы ΔOND да апофеманы табабыз:

$$|ND| = |ON|\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{l}{3\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2l}{3\sin 2\alpha}.$$

Конусның ян өслеге: $S_{ян} = \pi|ON||ND| = \pi\frac{l}{3\sin\alpha} \cdot \frac{2l}{3\sin 2\alpha} =$
$= \frac{2\pi l^2}{9\sin\alpha\sin 2\alpha}$.





$$S_m = S_{ян} + S_н = \frac{2\pi l^2}{9\sin\alpha\sin 2\alpha} + \frac{\pi l^2}{9\sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{\pi l^2}{9\sin^2\alpha}\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right) = \frac{2\pi l^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{9\sin^2\alpha\cos\alpha}.$$

Җавап. $\frac{2\pi l^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{9\sin^2\alpha\cos\alpha}$.

3.7. Цилиндрга камалган һәм камаучы призма

Әгәр призманың нигезе цилиндр нигезе белән камалса, бу призма камалган призма дип атала. Бу очракта призманың биеклеге цилиндр биеклегенә тигез, призманың ян кабыргалары цилиндрның төзүчеләре була.

Әгәр цилиндрның нигезе призма нигезе белән камалса, бу цилиндрны камаучы (призмага камалган цилиндр) призма дип атала. Бу очракта, шулай ук, призманың биеклеге цилиндр биеклегенә тигез, цилиндрның ян өслеге призманың ян кырларына орына.

Дүртенче мәсьәлә. Цилиндрга турыпочмаклы параллелепипед камалган. Аның диагонале янында яткан нигез яклары белән α һәм β почмаклары төзи. Параллелепипед белән цилиндр күләмнәренең чагыштырмасын табыгыз.

Чишү. Мәсьәләнең шарты буенча (5.61 рәс.) $A\hat{B}D_1 = \alpha$, $C\hat{B}D_1 = \beta$. Параллелепипедның күләме $V_п = SH$, биредә S — нигез мәйданы, H — биеклек; цилиндрның күләме $V_ц = \pi R^2 H$, биредә R — нигез радиусы. Бу күләмнәрнең чагыштырмасы $\frac{V_п}{V_ц} = \frac{S}{\pi R^2}$

була. Шуның өчен S һәм R^2 ны параллелепипедның диагонале аша табу кирәк. Бу диагональне a дип тамгалыйк: $|D_1B| = a$, ул чакта турыпочмаклы $\triangle ABD_1$ һәм $\triangle BCD_1$ дән $|AB| = a\cos\alpha$, $|BC| = a\cos\beta$ була.

Турыпочмаклы ABC өчпочмагыннан цилиндрның нигез радиусын табабыз: $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 \Leftrightarrow 4R^2 = a^2\cos^2\alpha + a^2\cos^2\beta \Rightarrow$ $\Rightarrow R^2 = \frac{a^2}{4}\left(\cos^2\alpha + \cos^2\beta\right)$.

Параллелепипедның нигезе $S = |AB||BC| = a^2\cos\alpha\cos\beta$ булганлыктан, R^2 һәм S ны күләмнәр чагыштырмасына куеп табабыз:
$\frac{V_п}{V_ц} = \frac{4a^2\cos\alpha\cos\beta}{\pi a^2\left(\cos^2\alpha+\cos^2\beta\right)}$.

Җавап. $\frac{4\cos\alpha\cos\beta}{\pi\left(\cos^2\alpha+\cos^2\beta\right)}$.

Үзлегеңнән чишү өчен мәсьәләләр

1. Конуска өчпочмаклы пирамида камалган. Бу пирамиданың ян кабыргалары үзара перпендикуляр булсалар, конусның биеклеге белән төзүче арасындагы почмакны табыгыз.

2. Конуска камалган пирамиданың нигезендә чиктәш яклары пар-пар тигез булган дүртпочмак ята. Бер пар чиктәш ятучы яклар арасындагы почмак α тигез булса, пирамида күләме белән конус күләменең чагыштырмасын табыгыз.

3. Конуска камалган пирамиданың нигезендә тигезьянлы өчпочмак ята. Бу якларның озынлыгы a га, ә алар арасындагы түбә почмагы α га тигез. α почмагына каршы ятучы нигез аша үтүче ян кыр нигез яссылыгына β почмагы ясап авышкан. Конусның күләмен табыгыз.

4. Дүртпочмаклы төзек пирамиданың биеклеге уртасында ятучы ноктадан ян кырларга булган ераклык d га тигез. Әгәр бу пирамидага камалган конус төзүчесе нигез яссылыгы белән α почмагы төзесә, бу конусның тулы өслеген табыгыз.

5. Конус нигезенең радиусы R, төзүчеләре нигез яссылыгына φ почмагы белән авышкан. Бу конус, нигезендә кысынкы почмагы α булган турыпочмаклы өчпочмак ятучы пирамидага камалган. Пирамиданың күләмен һәм ян өслек мәйданын табыгыз.

6. Цилиндрга нигезендә тигезьянлы, җәенке почмагы α булган трапеция яткан призма камалган. Әгәр трапециянең кече нигезе һәм ян яклары a га тигез, ә призма диагонале нигез яссылыгы белән β почмагы төзесә, цилиндрның күләмен табыгыз.

7. Цилиндрга камалган өчпочмаклы призманың бер кыры цилиндрның күчәре аша үтә. Бу кырның диагонале аңа чиктәш булган нигез яклары белән тиңдәш рәвештә α һәм β почмагы төзи. Әгәр цилиндрның биеклеге H булса, призманың күләмен табыгыз.

1. $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$. 2. $\frac{2\sin\alpha}{\pi}$. 3. $\frac{\pi a^3\cos\alpha\,\mathrm{tg}\beta}{24\cos^3\frac{\alpha}{2}}$.

4. $\frac{2\pi d^2}{\cos\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

5. $V=\frac{R^3}{3}\,\mathrm{tg}\varphi\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\,ctg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$; $S=\frac{R^2}{\cos\alpha}\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\,ctg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

6. $\frac{\pi a^3\mathrm{tg}\beta\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. 7. $\frac{H^3\cos\beta\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}}{2\sin^2\alpha}$.

4. ӘЙЛӘНҮ ҖИСЕМНӘРЕНЕҢ КОМБИНАЦИЯЛӘРЕ

4.1. Цилиндрга камалган шар

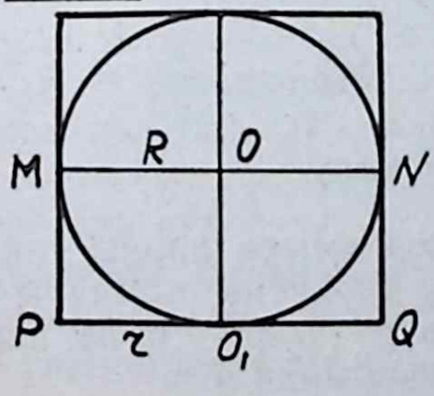
Әгәр шар цилиндрның нигезләренә һәм ян кырларына орынса, бу туры цилиндрга камалган шар (шарны камаучы цилиндр) була. Нигезгә орынган нокталар нигезләрнең үзәге булалар, ә ян өслек белән орыну сызыгы шарның зур түгәрәге әйләнәсе була һәм ул нигезгә параллель була. Шарның үзәге цилиндрның күчәрендә ята, цилиндр нигезенең диаметры шар диаметрына һәм цилиндрның биеклегенә тигез.

Беренче мәсьәлә. Цилиндрга шар камалган. Шарның өслек мәйданы белән цилиндрның тулы өслек мәйданының чагыштырмасын табыгыз.

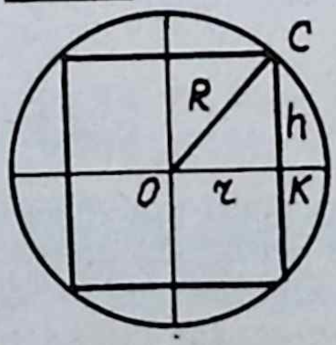
Чишү. R — шарның радиусы булсын. Ул чакта цилиндрның нигез радиусы $r=R$ (5.62 рәс.), ә цилиндрның биеклеге $H=2R$. Нәтиҗәдә, шарның өслек мәйданы $S_ш=4\pi R^2$, цилиндрның тулы өслек мәйданы $S_ц=2\pi R^2+2\pi R\cdot 2R=6\pi R^2$, һәм $\frac{S_ш}{S_ц}=\frac{4\pi R^2}{6\pi R^2}$.

Җавап. $\frac{2}{3}$.

5.62

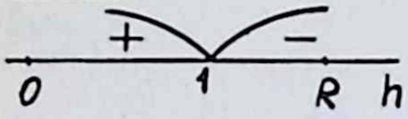


5.63



4.2. Шарга камалган цилиндр

5.64



Әгәр туры цилиндрның нигез әйләнәләре шарны чикләүче сферада ятса, бу цилиндр шарга камалган (цилиндрны камаучы шар) дип атала, цилиндрның нигезләре шарның кечкенә түгәрәкләре була, шарның үзәге цилиндр биеклегенең уртасындагы ноктага тәңгәл килә.

Икенче мәсьәлә. Күләме V булган шарга цилиндр камалган. Бу цилиндрның иң зур күләме нинди була?

Чишү. Әйтик, r — цилиндрның нигез радиусы, ә $2\,h$ цилиндрның биеклеге булсын, ул чакта цилиндрның күләме $V_ц = 2\pi r^2 h$ (5.63 рәс.), биредә $r = |OK|$, $h = |KC|$; ΔOKC нан: $r^2 = R^2 - h^2$, биредә R — шарның радиусы, димәк,

$$V_ц = 2\pi\left(R^2 - h^2\right)h = 2\pi\left(R^2 h - h^3\right).$$

Шулай итеп, мәсьәлә V ның, h тан функциясе буларак, иң зур кыйммәтен табуга кайтып кала. V ны h буенча дифференциаллап табабыз: $V'_ц(h) = 2\pi\left(R^2 - 3h^2\right)$, экстремумның кирәкле шарты буенча: $V'_ц = 0 \Rightarrow h^2 \frac{R^2}{3} = R^2/3 \Rightarrow h = R\sqrt{3}$.

Тамгалар схемасы 5.64 рәсемендә сурәтләнгән, моннан нәтиҗә: $V_ц(h)$ функциясе $h = R\sqrt{3}$ булганда иң зур кыйммәт ала.

$$V_ц\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right) = 2\pi\left(R^2\,\frac{R}{\sqrt{3}} - \frac{R^3}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}.$$

Бу кыйммәт $V_ц(h)$ функциясенең $[0,\,h]$ кисемтәсендәге иң зур кыйммәте, чөнки $V_ц(0) = V_ц(h) = 0$.

Ниһаять, R^3 ны V аша күрсәтәбез: $V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3$.

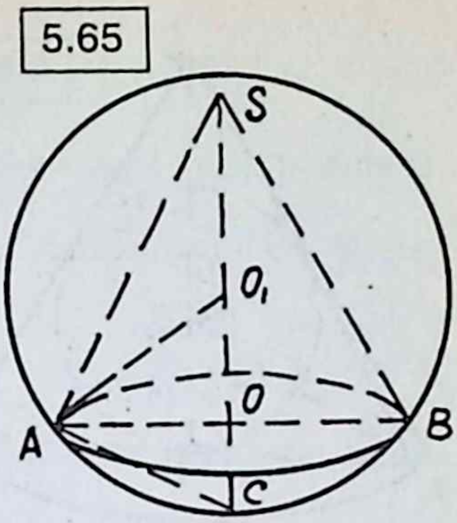
$$R^3 = \frac{3V_ш}{4\pi} \Rightarrow V_ц = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{3V_ш}{4\pi} = \frac{V_ш}{\sqrt{3}}.$$

Җавап. $\frac{V_ш}{\sqrt{3}} = \frac{V}{\sqrt{3}} = V_ц$.

4.3. Шарга камалган конус

Әгәр туры конусның түбәсе һәм нигез әйләнәсе шарны чикләүче сферада ятса, бу конус шарга камалган (конусны камаучы шар) була. Конус нигезе — кечкенә (яки зур) шар түгәрәге була, шарның үзәге конусның биеклегендә яки аның дәвамында ята.

Өченче мәсьәлә. Радиусы R булган сферага камалган конусның күләме иң зур булсын өчен, бу конусның нигез радиусы һәм биеклеге нинди булырга тиеш?



Чишү. Конус күләме $V_к = \frac{1}{3}\pi r^2 x$, биредә $r = |AO| = |OB|$, $x = |SO|$ (5.65 рәс.). Турыпочмаклы ASC өчпочмагыннан:

$$|AO|^2 = |SO| \cdot |OC| \Leftrightarrow r^2 = x(2R - x).$$

Ул чакта конус күләме формуласы (биеклеге x) түбәндәге рәвешне ала:

$$V_к \frac{\pi}{3} x^2(2R - x) = \frac{\pi}{3}\left(2Rx^2 - x^3\right).$$

Шулай итеп, мәсьәлә $V(x)$ функциясенең иң зур кыйммәтен табуга кайтып кала: $x \in [0,\ 2R]$; $V(0) = V(2R) = 0$.

$$V'(x) = \frac{\pi}{3}\left(4Rx - 3x^2\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \frac{4R}{3}.$$

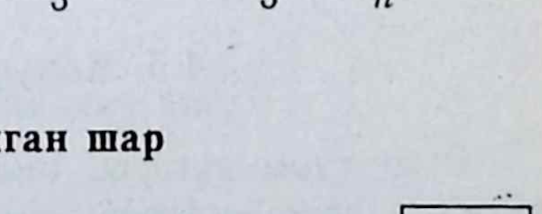
$V'(x)$ ның тамгалар схемасыннан (5.66 рәс.) нәтиҗә:

$$V_{max} = \frac{32\pi R^3}{81} < V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

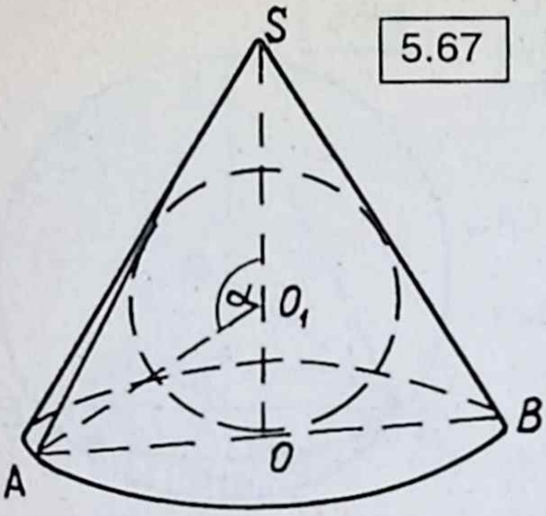
Җавап. $h = \frac{4R}{3}$; $r = \frac{2\sqrt{2R}}{3}$; $\frac{2r}{h} = \sqrt{2}$.

4.4. Конуска камалган шар

Әгәр шар туры конусның нигезенә һәм ян өслегенә орынса, ул шар конуска камалган (шарны камаучы конус) була. Шар конуска нигез үзәгендә орына, ә ян өслеккә (зур түгәрәк әйләнәсеннән башка) ниндидер әйләнә ясап орына, бу әйләнә яссылыгы нигез яссылыгына параллель була. Шарның үзәге конусның биеклегендә ята.



Дүртенче мәсьәлә. Радиусы R булган шар конуска камалган. Шар үзәгеннән конусның төзүчесе α почмагы белән күренә. Конусның күләмен табыгыз.



Чишү. Шарт буенча $|OO_1| = R$, $S\hat{O}_1A = \alpha$ (5.67 рәс.). Шарның SAB өчпочмагы яссылыгы белән киселе үзәге O_1 булган әйләнә хасил итә. Бу әйләнә өчпочмакка камалган була. Андый әйләнәнең үзәге биссектрисалар кисешү ноктасы белән тәңгәл килә, нәтиҗәдә:

$S\hat{A}O_1 = O\hat{A}O_1 = \pi/2 - A\hat{O}_1O = \pi/2 - (\pi - \alpha) =$
$= \alpha - \pi/2$; ΔOAO_1 нан $r = |AO| = |OO_1| \times$
$\times \operatorname{tg} A\hat{O}_1O = 2\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -R\operatorname{tg}\alpha$; ΔSAO нан була $H = |SO| = r\operatorname{tg} O\hat{A}S =$
$= r\operatorname{tg}(2\alpha - \pi) = -r\operatorname{tg}(\pi - 2\alpha) = r\operatorname{tg}2\alpha = -R\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}2\alpha.$

Конусның күләме: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 H = \frac{1}{3}\pi R^2 \operatorname{tg}^2\alpha(-R\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}2\alpha).$

Җавап. $-\frac{1}{3}\pi R^3 \operatorname{tg}^3\alpha \cdot \operatorname{tg}2\alpha.$

Искәрмә. ΔAOO_1 нан $\Rightarrow 0 < O\hat{A}O_1 < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < \alpha - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, ΔAOS та $\Rightarrow 0 < O\hat{A}S < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < 2\alpha - \pi < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow \pi < 2\alpha < \frac{3\pi}{2}$. Нәтиҗәдә, $\operatorname{tg}\alpha < 0$, $\operatorname{tg}2\alpha > 0$.

4.5. Конуска камалган цилиндр

Әгәр туры түгәрәк цилиндрның аскы нигезе конусның нигезендә, ә өске нигезнең әйләнәсе конусның ян өслегендә ятса, бу конуска камалган цилиндр (цилиндр камаучы конус) була, цилиндрның күчәре конус күчәренә тәңгәл килә.

Бишенче мәсьәлә. Конусның күләме иң кечкенә булсын өчен бирелгән туры цилиндрны аңа ничек камарга кирәк?

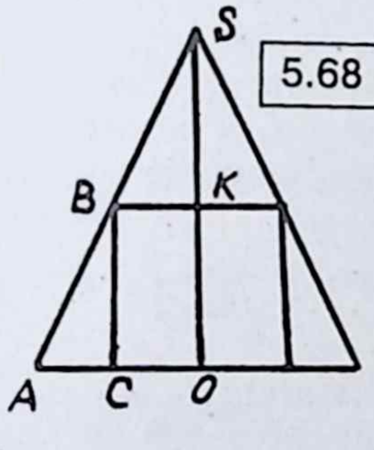
Чишү. Конус күләме $V_к = \frac{1}{3}\pi x^2 \cdot |SO|$, биредә $x = |OA|$ (5.68 рәс.). $|SO|$ ны $\Delta ASO \sim \Delta BSK$ дан чыгып табабыз:

$$\frac{|SO|}{|SK|} = \frac{|AO|}{|BK|} \Leftrightarrow \frac{|SO|}{|SO|-H} = \frac{x}{R} \Leftrightarrow R|SO| = x\left(|SO| - H\right) \Rightarrow |SO| = \frac{Hx}{x-R},$$

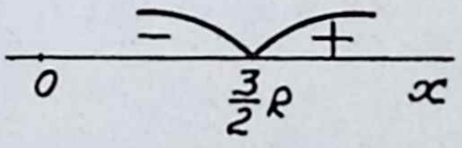
биредә H һәм R — бирелгән цилиндрның биеклеге һәм радиусы, $H = |OK|$, $R = |BK|$. Ул чакта $V = \frac{\pi H}{3} \frac{x^3}{x-R} = \frac{\pi H}{3} f(x)$. Бу функциянең чыгарылмасы: $f'(x) = \frac{3x^2(x-R)-x^3}{(x-R)^2} = \frac{2x^3-3x^2}{(x-R)^2} \Rightarrow x_{1,2} = 0$, $x_3 = \frac{3}{2}R$. $f'(x)$ өчен тамгалар схемасы 5.69 рәсемдә бирелгән. Моннан күренгәнчә, $f(x)$ функциясе иң кечкенә кыйммәтен $x = \frac{3}{2}R$ булганда ала, димәк, камаучы конус үзенең иң кечкенә күләмен үзенең радиусы цилиндр радиусыннан $\frac{3}{2}$ тапкыр зур булганда ала. Эзләнгән күләм:

$$V_{min} = \frac{\pi H}{3} f\left(\frac{3}{2}R\right) = \frac{\pi H}{3} \frac{\left(\frac{3}{2}R\right)^3}{\frac{3}{2}R-R}.$$

Җавап. $\frac{9}{4}\pi HR^2$.



5.68



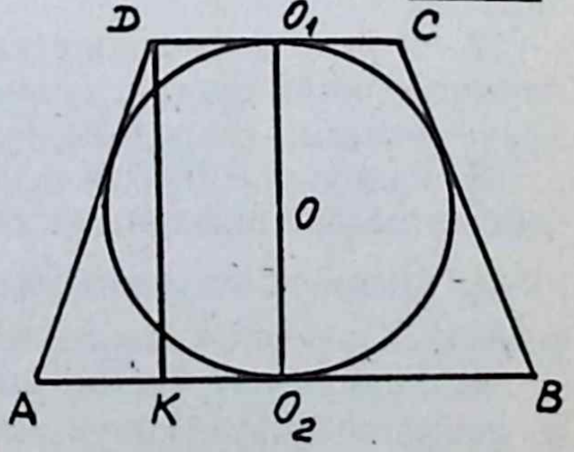
5.69

4.6. Кисек конуска камалган шар

Әгәр шар кисек конусның ике нигезенә һәм ян өслегенә орынса, шар кисек конуска камалган (шарны камаучы кисек конус) диләр. Шарның үзәге конус биеклегендә ята һәм аны урталай бүлә.

Алтынчы мәсьәлә. Кисек конусның күләме белән аңа камалган шарның күләме чагыштырмасы k га тигез. Конусның төзүчесе нигез яссылыгына нинди почмак ясап авышканын табыгыз, шулай ук k ның мөмкин табылган кыйммәтләрен тикшерегез.

5.70



Чишү. Әгәр әйләнә дүртпочмакка камалса, бу дүртпочмакның капма-каршы яклары суммасы үзара тигез булуы билгеле (5.70 рәс.): $|AD| + |BC| = |CD| + |AB|$ яки $|AO_2| = R_2$, $|DO_1| = R_1$ дип тамгалыйбыз: $2|AD| = 2R_2 + 2R_1 \Rightarrow |AD| = R_1 + R_2$. Хәзер R_1 һәм R_2 нең бәйләнешен табыйк: $R = |OO_1| = |OO_2| : |AK| = R_2 - R_1$; $\triangle AKD$ дан $|DK|^2 = |AD|^2 - |AK|^2 \Leftrightarrow (R_1 + R_2)^2 - (R_2 - R_1)^2 = (2R)^2 \Rightarrow (2R)^2 = 4R_1R_2 \Rightarrow R^2 = R_1R_2$.

Шарт буенча $\frac{V_к}{V_ш} = k$, биредә $V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3$, $V_к = \frac{1}{3}\pi H\left(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2\right)$, $H = 2R$, шунлыктан $\frac{R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2}{R^2} = 2k \Rightarrow \left(\frac{R_1}{R}\right)^2 + \frac{R_1R_2}{R^2} + \left(\frac{R_2}{R}\right)^2 = 2k$.

$\triangle ADK$ дан $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{|AK|}{|DK|} = \frac{R_2 - R_1}{2R} \Leftrightarrow \frac{2}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{R_2}{R} - \frac{R_1}{R} \Rightarrow \left(\frac{R_1}{R}\right)^2 + \left(\frac{R_2}{R}\right)^2 = \frac{4}{tg^2\alpha} + \frac{2R_1R_2}{R^2}$; шунлыктан, билгесезе α булган тигезләмә ($R^2 = R_1R_2$ икәнен исәпкә алабыз) түбәндәге рәвешкә килә:

$$\frac{4}{\operatorname{tg}^2\alpha} + 3 = 2k \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{\sqrt{2k-3}} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{2k-3}}, \quad k > \frac{3}{2}.$$

Җавап. $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{2k-3}}$, $k > 1{,}5$.

Үзлегеңнән эшләү өчен мәсьәләләр

1. R радиуслы шар цилиндр белән камалган. Бу шарга, цилиндрның нигезенә һәм ян өслегенә орынган икенче шарның радиусын табыгыз.

2. Туры түгәрәк конуска ярымшар камалган. Конусның ачылу почмагы нинди булганда, ярымшар белән конус орынган әйләнә аша үтүче яссылык конусның күләмен урталай бүлә?

3. Радиусы R булган шарга кисек конус камалган. Кисек конусның нигезләре шардан ике сегмент кисеп алалар. Бу сегментларның күчәр кисемендәге почмаклары тиңдәш рәвештә α һәм β. Кисек конусның ян өслек мәйданын табыгыз.

4. Радиусы R булган шарга биеклеге белән төзүчесе арасында α почмагы булган конус камалган. Бу конусның күләмен табыгыз.

5. Күләме V булган конуска шар камалган. Конусның төзүчесе нигез яссылыгына α почмагы ясап авышкан. Шарның конус ян өслегенә орынудан хасил булган әйләнәнең радиусын табыгыз.

6. Конуска шар камалган. Конус күләменең шар күләменә чагыштырмасы $9/4$. Конус төзүчесе белән нигез яссылыгы арасындагы почмакны табыгыз.

7. Кисек конуска шар камалган. Конусның өске һәм аскы нигезләренең диаметрлары суммасы шар радиусыннан биш тапкыр зур. Конус төзүчесе белән нигез яссылыгы арасындагы почмакны табыгыз.

8. Шарны камаган кисек конусның төзүчесе a га тигез, конус төзүчесе белән нигез яссылыгы арасындагы почмак α га тигез. Түбәсе кисек конусның зур нигезе үзәгендә яткан, нигезе шар белән кисек конусның орынуыннан хасил булган түгәрәк булган конусның күләмен табыгыз.

9. Биеклеге конус нигезенең диаметрына тигез булган цилиндр конуска камалган. Цилиндрның тулы өслек мәйданы конус нигезенең мәйданына тигез. Конус төзүчесе белән нигез яссылыгы арасындагы почмакны табыгыз.

10. Кисек конуска шар камалган. Шарның күләме конус күләменнән ике мәртәбә ким. Конусның төзүчесе белән нигез яссылыгы арасындагы почмакны табыгыз.

11. Радиусы R булган шарын камаучы иң кечкенә күләмле конусның биеклеген һәм нигез радиусын табыгыз.

12. Радиусы R булган ярымшарга конус камалган (конус нигезенең үзәге шар үзәгендә ята). Иң кечкенә күләмле конусның биеклеген табыгыз.

Җаваплар

1. $r = R\left(3 - 2\sqrt{2}\right)$.

2. $\varphi = \arccos\left(\sqrt[3]{4} - 1\right)$.

3. $S = 2\pi R^2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

4. $V = \frac{2}{3}\pi R^3 \sin^2 2\alpha \cos^2 \alpha$.

5. $r = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}\,\mathrm{ctg}\alpha}$.

6. $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$, $\alpha_2 = 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{2}{3}}$.

7. $\arcsin\frac{4}{5}$.

8. $\frac{\pi a^3}{12}\sin^5\alpha \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2}$.

9. $\mathrm{arctg}\,\frac{2\left(4+\sqrt{6}\right)}{5}$.

10. $\mathrm{arctg}\,2$.

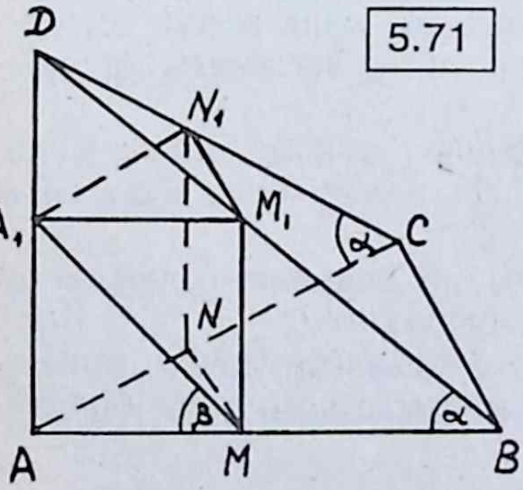
11. $r = R\sqrt{2}$. $h = 4R$.

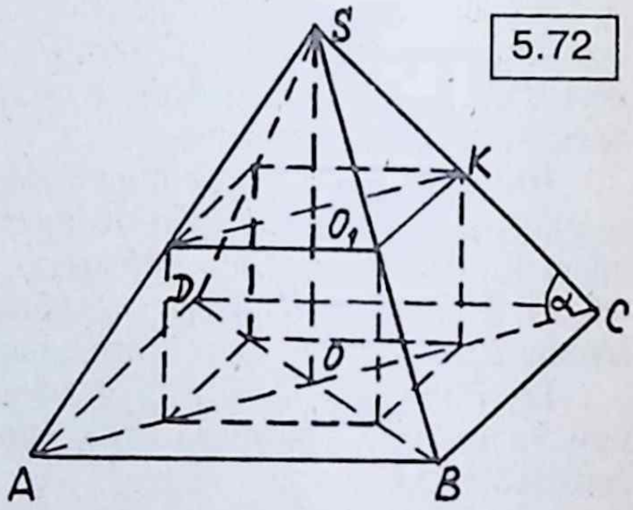
12. $R\sqrt{3}$.

5. БАШКА ТӨРЛЕ МӘСЬӘЛӘЛӘР

Шуны әйтик, югарыда тикшерелгән җисемнәрнең урнашу вариантларын карау, югары уку йортларына кергәндә имтиханнарда очрый торган һәртөрле комбинацияләрне тулаем тикшерү дигән сүз түгел. Мисал итеп пространстводагы геометрик фигураларның берберсенә карата башка төрдә урнашу очракларын карыйк.

Беренче мәсьәлә. Пирамиданың нигезендә төзек өчпочмак ята. Пирамиданың озынлыгы l булган бер ян кабыргасы нигез яссылыгына перпендикуляр, ә калган икесе нигез яссылыгына α почмагы ясап авышкан. Пирамидага туры призма камалган: аның өч түбәсе пирамиданың ян кабыргаларында, ә калган өчесе пирамиданың нигезендә ята. Призманың ян кыр диагонале нигез яссылыгына β почмагы ясап авышкан. Призманың биеклеген табыгыз.





Чишү. Мәсьәләнең шарты буенча (5.71 рәс.) AD ΔABC яссылыгына перпендикуляр, $A\hat{B}D = A\hat{C}D = \alpha$, $A\hat{M}A_1 = \beta$, $|AD| = l$, $|AA_1| = h$ дип билгеләсәк, турыпочмаклы ΔAA_1M да $|AM| = h\,\mathrm{ctg}\beta$. ΔABD һәм ΔA_1M_1D ларның охшашлыгыннан: $\frac{|A_1D|}{|A_1M_1|} = \frac{|AD|}{AB}$.

$|AM| = |A_1M_1| = h\,\mathrm{ctg}\beta$, $|A_1D| = l - h$, $|AB| = l\,\mathrm{ctg}\alpha$ булганлыктан, соңгы чагыштырма түбәндәге рәвешкә килә:

$$\frac{l-h}{h\,\mathrm{ctg}\beta} = \frac{l}{l\,\mathrm{ctg}\alpha} \Leftrightarrow (l-h)\,\mathrm{ctg}\alpha = h\,\mathrm{ctg}\beta \Leftrightarrow l\,\mathrm{ctg}\alpha = h(\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}\beta).$$

Җавап. $h = \frac{l\,\mathrm{ctg}\alpha}{\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}\beta} = \frac{l}{1 + \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{ctg}\beta}$.

Икенче мәсьәлә. Дүртпочмаклы төзек пирамидага куб камалган, аның өске нигезенең түбәләре пирамиданың кабыргаларында ята. Әгәр пирамиданың кабыргалары нигез яссылыгына α почмагы

ясап авышса, куб күләменең пирамида күләменә чагыштырмасын табыгыз.

Чишү. Мәсьәләнең шарты буенча $O\hat{C}S = \alpha$ (5.72 рәс.). Пирамида нигезенең яклары a га тигез булса,

$$|OC| = \frac{a\sqrt{2}}{2}; \; |OS| = |OC|\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Пирамиданың күләме $V = \frac{1}{3}a^2|OC| = \frac{\sqrt{2}}{6}a^3\mathrm{tg}\alpha$. $\Delta OCS \infty O_1KS$, шунлыктан: $\frac{|OS|}{|OC|} = \frac{|O_1S|}{|O_1K|}$ яки $\frac{|OS|}{|OC|} = \frac{|OS|-x}{x\frac{\sqrt{2}}{2}}$, биредә x — куб кабыргасы озынлыгы. Соңгы тигезлектән табабыз:

$$x = \frac{a|OS|}{|OS|+a} = \frac{a^2\sqrt{2}\mathrm{tg}\alpha}{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\mathrm{tg}\alpha+a\right)} = \frac{a\mathrm{tg}\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{2}\mathrm{tg}\alpha+2}.$$

Кубның күләме

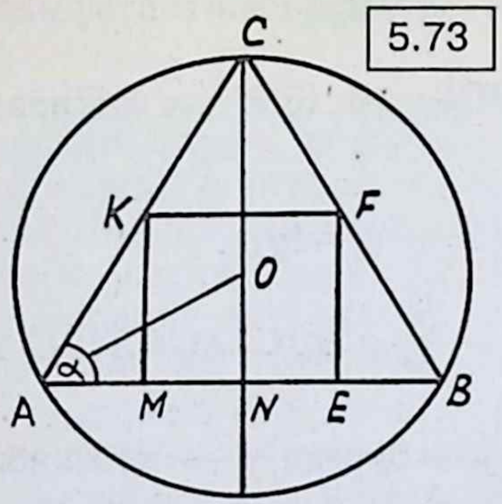
$$V_\kappa = x^3 = \frac{a^3\mathrm{tg}^3\alpha\cdot 2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\mathrm{tg}\alpha+2\right)^3}, \text{ моннан } \frac{V_\kappa}{V_п} = \frac{a^3\mathrm{tg}^3\alpha\cdot 2\sqrt{2}\cdot 6}{\left(\sqrt{2}\mathrm{tg}\alpha+2\right)^3 a^3\sqrt{2}\mathrm{tg}\alpha}.$$

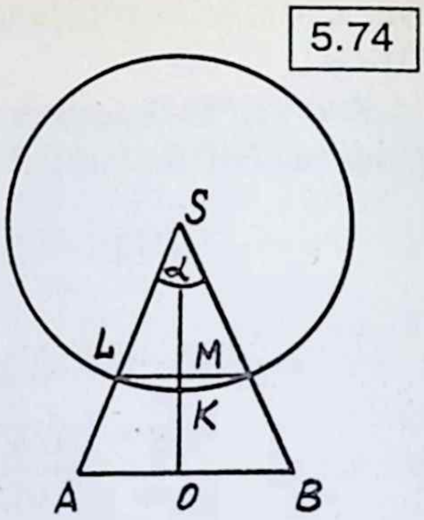
Җавап. $\frac{V_\kappa}{V_п} = \frac{3\sqrt{2}\mathrm{tg}^2\alpha}{\left(\mathrm{tg}\alpha+\sqrt{2}\right)^3}$.

Өченче мәсьәлә. Радиусы R булган шарга конус камалган, ә бу конуска күчәр киселеше квадрат булган цилиндр камалган. Әгәр конусның төзүчесе нигез яссылыгына α почмагы ясап авышса, цилиндрның тулы өслек мәйданын табыгыз.

Чишү. Цилиндрның тулы өслек мәйданы: $S_ц = 2\pi x^2 + 2\pi x \times \times 2x = 6\pi x^2$, биредә $x = \frac{|ME|}{2} = \frac{|MK|}{2}$. (5.73 рәс.). (Шарт буенча $MEFK$ дүртпочмагы — квадрат). x ны табабыз. Синуслар теоремасы буенча $\frac{|BC|}{\sin\alpha} = 2R$, биредә R — шар радиусы. ΔANC дан: $|AN| = |AC|\cos\alpha = |BC|\cos\alpha = R\sin 2\alpha$. Нәтиҗәдә, $|AM| = |AN| - |MN| = R\sin 2\alpha - x$. Хәзер x ны табу өчен тигезләмә төзибез: ΔAMK да $|KM| = |AM|\mathrm{tg}\alpha = (R\sin 2\alpha - x)\mathrm{tg}\alpha$, икенчедән, $|KM| = 2x$, димәк, $(R\sin 2\alpha - x)\mathrm{tg}\alpha = 2x \Leftrightarrow x = \frac{R\sin 2\alpha\,\mathrm{tg}\alpha}{2+\mathrm{tg}\alpha} = \frac{R\sin 2\alpha}{1+2\mathrm{ctg}\alpha}$.

Җавап. $S_ц = \frac{6\pi R^2\sin^2 2\alpha}{(1+2\mathrm{ctg}\alpha)^2}$.





Дүртенче мәсьәлә. Конусның күчәр киселеме түбәсендәге почмак α га, ә нигез радиусы R га тигез. Үзәге конусның түбәсендә яткан һәм конусның күләмен урталай бүлүче сфераның радиусын табыгыз.

Чишү. Әйтик, эзли торган сфераның радиусы $|SK| = r$ булсын (5.74 рәс.). $V_к = \frac{\pi R^2}{3}|SO| = \frac{\pi R^2}{3} R \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Сфера конусны ике тигез кисәккә бүлә, аларның берсе — шар секторы. Билгеле булганча, бу секторның күләме $V_{ш.с} = \frac{2}{3}\pi r^2 h$, биредә $h = |MK|$. Шарт буенча $\frac{2}{3}\pi r^2 |MK| = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi R^3}{3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. ΔSLM да $|SM| = |SL|\cos\frac{\alpha}{2} = r\cos\frac{\alpha}{2}$. Ул чакта $|MK| = |SK| - |SM| = r - r\cos\frac{\alpha}{2} = 2r\sin^2\frac{\alpha}{4}$. r ны табу өчен тигезләмә түбәндәге рәвештә була: $\frac{4}{3}\pi r^2 \sin^2\frac{\alpha}{4} = \frac{1}{6}\pi R^3 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

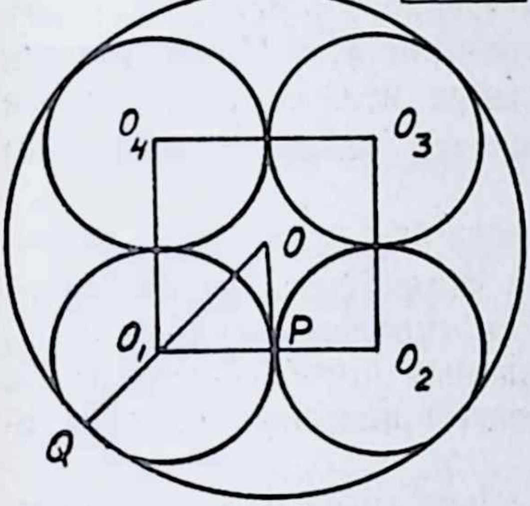
Җавап. $r = \frac{R}{2}\sqrt[3]{\frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{4}}}$.

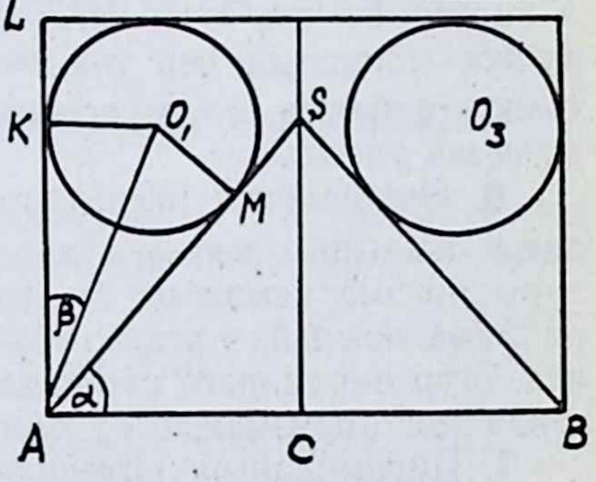
Искәрмә. $\alpha \to \pi$ һәм $\alpha \to 0$ очракларын карагыз.

Бишенче мәсьәлә. Радиусы $\frac{3}{2}$, биеклеге $6(\sqrt{2}-1)$ булган туры түгәрәк цилиндрга дүрт бертөрле шар тыгылган. Алар цилиндрның өске нигезенә, ян өслегенә һәм калган өч шарның икесенә орыналар. Нигезе цилиндрның аскы нигезенә тәңгәл килгән һәм барлык дүрт шарга орына торган туры түгәрәк конусның ян өслек мәйданын табыгыз.

Чишү. Эзли торган мәйданны табу өчен ике планиметрик сызым җитә, бу сызымнар мәсьәләнең шартына тиңдәш була: 5.75 рәс. (өстән караганда) һәм 5.76 рәс. (цилиндрның күчәр киселеме). Әйтик, r — шарның радиусы булсын, 5.75 рәсеменнән: $r = |O_1P| = |O_1O| \times \sin\frac{\pi}{4} = (|OQ| - |O_1Q|)\sin\frac{\pi}{4} = \left(\frac{3}{2} - r\right)\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow r = \frac{3}{2(\sqrt{2}+1)}$. Конусның

ян өслек мәйданы $S_{ян} = \pi RL$ формуласы белән табыла, биредә $R = \frac{3}{2}$, $L = |AS|$ — конус төзүчесе озынлыгы, ул 5.76 рәсеменнән табыла (AS — үзәге O_1 булган әйләнәгә орынма):





$$|AS| = \frac{|AC|}{\cos\alpha} = \frac{3}{2}\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\beta\right)} = \frac{3}{2}\frac{1}{\sin 2\beta} = \frac{3}{2}\frac{1+\mathrm{tg}^2\beta}{2\mathrm{tg}\beta};\quad \triangle AKO_1 \text{ да } \mathrm{tg}\beta =$$

$$\frac{|KO_1|}{|KA|} = \frac{|KO_1|}{|LA|-|LK|} = \frac{r}{6\left(\sqrt{2}-1\right)-r} = \frac{3}{2\left(\sqrt{2}+1\right)}\frac{1}{6\left(\sqrt{2}-1\right)-\frac{3}{2\left(\sqrt{2}+1\right)}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{12-3} = \frac{1}{3};$$

$$L = |AS| = \frac{3}{2}\cdot\frac{1+\frac{1}{9}}{2\cdot\frac{1}{3}} = \frac{5}{2}.$$

Ниһаять, $S_{ян} = \pi\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2} = \frac{15\pi}{4}$.

Җавап. $\frac{15\pi}{4}$.

Үзлегеңнән эшләү өчен мәсьәләләр

1. Ачылу почмагы 60° булган туры түгәрәк конуска радиуслары r булган өч бертөрле шар салынган. Бу шарларның һәрберсе калган ике шарга, нигез яссылыгына һәм конусның ян өслегенә орына. Конус нигезенең радиусын табыгыз.

2. Радиусы R булган шарга уртак нигезле ике конус камалган. Бу конусларның түбәләре шар диаметрының капма-каршы очларында яталар. Кечкенә конуслы шар сегментының күчәр кисемендәге дугасы α га тигез. Бу конусларга камалган шарларның үзәкләре арасын табыгыз.

3. Конусның түбәсе шарның үзәгендә ята, ә конусның нигез яссылыгы шарга орына. Конусның тулы өслек мәйданы шарның өслек мәйданына тигез. Конусның биеклеге белән төзүчесе арасындагы почмакны табыгыз.

4. Цилиндр эчендә дүрт бер үк төрле шар урнашкан. Аларның һәркайсы калган өч шарга һәм цилиндрның ян өслегенә орына. Ике шар өске нигезгә, ә калган икесе аскы нигезгә орыналар. Әгәр шарның күләме V булса, цилиндрның күләмен табыгыз.

5. Конуска камалган пирамиданың нигезендә бер ягы a га тигез, ә калган өч ягы b га тигез булган дүртпочмак ята. Пирамиданың түбәсе конусның бер төзүчесенең уртасында ята. Әгәр конусның биеклеге белән төзүче арасындагы почмак α булса, пирамиданың күләмен табыгыз.

6. Өчпочмаклы төзек пирамиданың нигез ягы a га, нигез янындагы икекырлы почмагы α га тигез. Бу пирамидага өчпочмаклы туры призма камалган; бу призманың өске түбәләре пирамиданың апофемаларында, ә аскы түбәләре пирамиданың нигез яссылыгында ята. Әгәр пирамидага камалган шарның үзәге призманың өске нигезендә ятса, призманың күләмен табыгыз.

7. Пирамиданың нигезендә тигезьянлы һәм тигез яклар арасындагы почмагы α булган өчпочмак ята. Бу пирамида цилиндр эченә урнаштырылган. Аның нигезе цилиндр нигезенә камалган, ә түбәсе цилиндрны төзүче кисемтәнең уртасында ята. Әгәр цилиндрның әйләнәсе V булса, пирамиданың күләмен табыгыз.

Җаваплар

1. $\frac{5r\sqrt{3}}{3}$.
2. $\frac{R\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{8}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{8}\right)}$.
3. $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.
4. $\left(6+3\sqrt{2}\right)V$.
5. $\frac{1}{24}\left(ab+b^2\right)^{\frac{3}{2}}\operatorname{ctg}\alpha$.
6. $\frac{a^3\sin\frac{\alpha}{2}}{128\cos^5\frac{\alpha}{2}}$.
7. $\frac{V}{3\pi}\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

VI бүлек

МАТЕМАТИК АНАЛИЗ ЭЛЕМЕНТЛАРЫ

1. САНЛЫ ЭЗЛЕКЛЕЛЕК ҺӘМ АНЫҢ ЧИКЛӘМӘСЕ

Беренче билгеләмә. Функциянең натураль саннар күплегендә бирелгән кыйммәтләре *санлы эзлеклелек* дип атала һәм ул түбәндәгечә тамгалана:

$$\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n ...\} \text{ яки } \{a\}.$$

Андый функциянең натураль n санына тиңдәшле $f(n) = a_n$ кыйммәте эзлеклелекнең *гомуми буыны* дип атала.

Икенче билгеләмә. Санлы эзлеклелек дип буыннары саннар булган эзлеклелеккә әйтәләр. Гадәттә эзлеклелек формула белән күрсәтелә. Мәсәлән, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ формуласы белән буыннары, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ булган эзлеклелек бирелә.

Мисаллар:

а) $\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots \frac{1}{n}; \ldots\right\}$

б) $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\} = \left\{-1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \ldots \frac{(-1)^n}{n}; \ldots\right\}$

в) $\left\{\sin\frac{n\pi}{2}\right\} = \left\{-1; 0; -1; 0; \ldots \sin\frac{n\pi}{2}; \ldots\right\}$

Өченче билгеләмә. Теләсә нинди $\varepsilon > 0$ өчен, җитәрлек кадәр зур булган барлык $n > n_\varepsilon$ номерлары өчен дә

$$|a_n - a| < \varepsilon \tag{6.1}$$

тигезсезлеге үтәлсә, a саны $\{a_n\}$ эзлеклелегенең *чикләмәсе* дип атала.

Әгәр a саны $\{a_n\}$ эзлеклелегенең чикләмәсе булса, аны $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ дип язалар һәм n чиксезлеккә омтылганда $(n \to \infty)$ a_n

a га омтыла $(a_n \to a)$ дип әйтәләр, $\{a_n\}$ эзлеклелеге a ноктасына җыела дияргә дә мөмкин.

(6.1) тигезсезлеге икеләтелгән $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ тигезсезлегенә эквивалент. Моннан, a ноктасының ε тирәлегендә чиксез күп a_n нокталары булуы, ә бу тирәлекнең тышында чикле сандагы нокталар гына була дигән нәтиҗә килеп чыга.

Шулай итеп, $\{a_n\}$ эзлеклелеге өчен a ноктасының чикләмә булуын исбат итү — теләсә нинди $\varepsilon > 0$ өчен n_ε номерын табу һәм, $n_\varepsilon + 1$ номерыннан башлап, эзлеклелекнең барлык буыннарының да a ноктасының ε тирәлегендә ятканын исбат итү дигән сүз. (6.1 рәс.).

Дүртенче билгеләмә. Чикләмәсе булган эзлеклелек *җыелучан*, булмаганы — *таралучан* эзлеклелек дип атала.

Беренче теорема. Һәрбер җыелучан эзлеклелекнең чикләмәсе бердәнбер була.

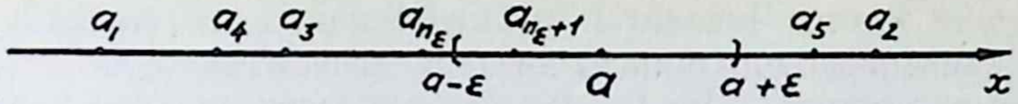
Мисал. Чикләмәнең билгеләмәсен файдаланып, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n+1} = 2$ икәнен исбатлыйк.

Ирекле алынган ε өчен n_ε ны табабыз: $|a_n - 2| = \left|\frac{2n-1}{n+1} - 2\right| = \left|\frac{-3}{n+1}\right| = \frac{3}{n+1} < \varepsilon$, моннан $n > \frac{3}{\varepsilon} - 1$. Әгәр $\frac{3}{\varepsilon} - 1$ бөтен сан булса, аны n_ε итеп алып була. Әгәр $\frac{3}{\varepsilon} - 1$ бөтен булмаса, $n_\varepsilon = \left[\frac{3}{\varepsilon}; -1\right]$ дип алабыз, биредә $[x]$ тамгасы "x" санының бөтен өлешен күрсәтә.

Шулай итеп, теләсә нинди $\varepsilon > 0$ булганда, без n_ε не күрсәтә алабыз, һәм аның өчен $n > n_\varepsilon$ булганда, $|a_n - 2| < \varepsilon$ үтәлүе ачык, ә бу хәл $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-2}{n+1} = 2$ булуын исбат итә. Әйтик, $\varepsilon = 0{,}01$, ул чакта $n_\varepsilon = \frac{3}{\varepsilon} - 1 = \frac{3}{0{,}01} - 1 = 299$ һәм эзлеклелекнең номерлары 300 һәм аннан артык булган барлык буыннары $a = 2$ ноктасының ε тирәлегендә ята.

Бишенче билгеләмә. Әгәр теләсә нинди $n \in N$ өчен $|a_n| \leq M$ тигезсезлеге үтәлерлек $M > 0$ булса, $\{a_n\}$ *чикләнгән эзлеклелек* дип атала. Мәсәлән, $\left\{\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$ эзлеклелеге чикләнгән, чөнки теләсә нинди $n \in N$ өчен $\left|\sin\frac{n\pi}{2}\right| \leq 1$. $\{n\}$ эзлеклелеге чикләнмәгән.

6.1



Икенче теорема. Һәрбер җыелучан эзлеклелек чикләнгән була.
Эзлеклелекнең җыелучан булуы өчен аның чикләнгән булуы кирәкле шарт булса да, җитәрлек шарт булмавын әйтеп китү кирәк.

Мәсәлән, $\left\{\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$ эзлеклелеге чикләнгән булса да, ул таралучан эзлеклелек була (бу фикерне, чикләмәнең геометрик интерпретациясен кулланып, үзегез исбат итегез).

Алтынчы билгеләмә. Әгәр теләсә нинди n өчен $a_n < a_{n+1}$ булса, $\{a_n\}$ *монотон үсә баручы* эзлеклелек дип атала. Әгәр $a_n > a_{n+1}$ булса, *монотон кими баручы* эзлеклелек дип атала.

Мисал. $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ эзлеклелегенең кими баручы икәнен исбатлагыз.

Биредә $a_n = \frac{1}{n}$, $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, $a_n - a_{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$, ягъни $a_n > a_{n+1}$. Шуны исбат итү кирәк иде дә.

Өченче теорема. Монотон һәм чикләнгән һәрбер эзлеклелек җыелучан була.

Җиденче билгеләмә. Чикләмәсе нуль булган эзлеклелек чиксез кечкенә (җетек) эзлеклелек дип атала. Ул болай языла: $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Мисаллар. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ икәнен исбатлагыз.

Ирекле рәвештә алынган $\varepsilon > 0$ өчен $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ булырлык n_ε табабыз. Моннан $n > \frac{1}{\varepsilon}$, димәк, $n_\varepsilon\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

Мәсәлән, әгәр $\varepsilon = 0{,}001$ булса, $n_\varepsilon = 1000$, әгәр $\varepsilon = 0{,}003$ булса, $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{0{,}003}\right] = [333,(3)] = 333$ була.

б) $\left\{2^{-n}\right\}$ эзлеклелегенең чиксез кечкенә икәнлеген исбатлагыз.

$\varepsilon > 0$ бирелсен ди. Ул чакта $n > n_\varepsilon$ өчен $\left|2^{-n} - 0\right| < \varepsilon$ тигезсезлеге үтәлергә тиеш. Димәк, $2^{-n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > -\log_2\varepsilon$. Нәтиҗәдә, $n_\varepsilon = \left[\log_2\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

1.1. Чиксез кечкенә эзлеклелекләрнең үзлекләре

Беренче үзлек. Чикләнгән эзлеклелекнең чиксез кечкенә эзлеклелеккә тапкырчыгышы чиксез кечкенә эзлеклелек була.

Беренче нәтиҗә. Ике чиксез кечкенә эзлеклелекнең тапкырчыгышы чиксез кечкенә эзлеклелек була.

Икенче нәтиҗә. Чиксез кечкенә эзлеклелекнең даими зурлык белән тапкырчыгышы чиксез кечкенә эзлеклелек була.

Икенче үзлек. Чикле сандагы чиксез кечкенә эзлеклелекләрнең алгебраик суммасы чиксез кечкенә эзлеклелек була.

Мисал. $a_n = \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n(n+1)}$ булганда, $\{a_n\}$ эзлеклелеге чиксез кечкенә эзлеклелек була. $n \to \infty$ булганда беренче үзлек нәтиҗәсендә $5 \cdot \frac{1}{n} \to 0$; $2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \to 0$; $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \to 0$. Икенче үзлек буенча $n \to \infty$ булганда $a_n \to 0$.

Дүртенче теорема. a саны $\{a_n\}$ эзлеклелегенең чикләмәсе булсын өчен $a_n = a + \alpha_n$ тигезлегенең үтәлүе кирәк һәм шул җитә дә; биредә α_n чиксез кечкенә эзлеклелекнең гомуми буыны.

Мисал. Әйтик, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. $\{a_n + b_n\}$ эзлеклелегенең чикләмәсе $a + b$ булуын исбатлагыз.

Дүртенче теорема буенча (кирәклек): $a_n = a + \alpha_n$, $b_n = b + \beta_n$, биредә $\{\alpha_n\}$ һәм $\{\beta_n\}$ чиксез кечкенә эзлеклелекләр. Ул чакта $a_n + b_n = (a + \alpha_n) + (b + \beta_n)$. Икенче үзлек буенча $\{\alpha_n + \beta_n\}$ — чиксез кечкенә эзлеклелек. Дүртенче теорема буенча (җитәрлек) бу $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$ икәнен аңлата.

1.2. Эзлеклелекләрнең чикләмәсен исәпләү

Әгәр $\{a_n\}$ һәм $\{b_n\}$ эзлеклелекләре җыелучан булсалар, ул чакта

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}\left(\lim\limits_{n\to\infty} - b_n \neq 0,\ b_n \neq 0\right).$

Мисаллар. а) Чикләмәне табыгыз: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n+4}{n^2+2}$.

Биредә $a_n = 3n^2 + 5n + 4$; $b_n = n^2 + 2$. Эзлеклелекләрнең икесе дә таралучан, чөнки эзлеклелекләр җыелучанлыгының кирәкле — чикләнгән булу шарты үтәлми. Димәк, вакланманың чикләмәсен табу кагыйдәсен кулланып булмый. Шуның өчен, вакланманың ваклаучысын һәм санаучысын n^2 ка бүлеп, рәвешен үзгәртәбез:

$$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n+4}{n^2+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}}=\frac{3+0+0}{1+0}=3.$$

б) Чикләмәне табыгыз $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$.

Санаучы арифметик прогрессия булганлыктан, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=$

$$=\lim\limits_{n\to\infty}=\frac{(1+n)n}{2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+n}{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

в) $\{a_n\}=\left\{\frac{1}{n}\sin\frac{\pi n}{2}\right\}$ эзлеклелегенең җыелучан булуын исбатлагыз.

$\left\{\frac{1}{n}\right\}$ эзлеклелеге — чиксез кечкенә эзлеклелек, $\left\{\sin\frac{\pi n}{2}\right\}$ таралучан (ни өчен?), ләкин чикләнгән эзлеклелек. Чиксез кечкенә эзлеклеләрнең беренче үзлеге нәтиҗәсендә, тапкырчыгыш җыелучан чиксез кечкенә эзлеклелек була.

Теорема. Әгәр $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ булса, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[k]{a_n}=\sqrt[k]{a}$ була. (Биредә, әгәр k җөп булса, теләсә нинди $n\in N$ өчен дә $a_n \geq 0$ була дип шарт куела.)

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ чикләмәсен табыгыз.

$$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}+1}=$$

$$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

д) Әгәр $a_n=\sqrt{n^2+n+1}$, $b_n=\sqrt{n^2-n+1}$ булса, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)$ ны табыгыз.

$\{a_n\}$ һәм $\{b_n\}$ икесе дә таралучан эзлеклеләр, чөнки алар чикләнмәгән. Мәсәлән, $a_n = n\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$. Моннан теләсә нинди n өчен $a_n > n$ икәне ачык. $\{n\}$ эзлеклеге чикләнмәгән булганлыктан, $\{a_n\}$ шулай ук чикләнмәгән эзлеклелек була.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} = \frac{(n^2+n+1)-(n^2-n+1)}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} = \frac{2}{1+1} = 1.$$

Күнегүләр

1. Эзлеклелекнең чикләмәсе билгеләмәсен файдаланып,

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-n}{2n+3} = -\frac{1}{2}$, б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-2}{5n^2+1} = \frac{3}{5}$ икәнен исбатлагыз.

2. Радиусы R булган әйләнә озынлыгын исәпләү өчен формула чыгарыгыз.

3. Эзлеклелекләрдән кайсысы чикләнгән?

а) $a_n = (-1)^n\frac{2n}{n+1}\sin n$; б) $a_n = n\cos\pi u$;

4. Чикләмәләрне табыгыз:

а) $a_n = \frac{5n^3+n^2-2n+6}{7n^3-4n+1}$; б) $a_n = \frac{n+1}{3n^2-2n+5}$;

в) $a_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}}$; г) $a_n = \sqrt[3]{1-n^3}+n$;

д) $a_n = \frac{n\sin n!}{n^2+1}$; е) $a_n = \frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2}$.

Җаваплар

3. а) чикләнгән; б) чикләнмәгән. 4. а) $\frac{5}{7}$; б) 0; в) $\frac{4}{3}$; г) 0; д) 0; е) $-\frac{3}{2}$.

2. ФУНКЦИЯНЕҢ ЧИКЛӘМӘСЕ ҺӘМ АНЫҢ НОКТАДА ӨЗЛЕКСЕЗЛЕГЕ

Әйтик, $f(x)$ функциясе x_0 ноктасының үзеннән башка аның тирәсендәге барлык нокталарда билгеләнгән. Теләсә нинди уңай ε саны өчен $x \neq x_0$ ның

$$|x - x_0| < \delta \tag{6.2}$$

тигезсезлеген канәгатьләндерә торган барлык кыйммәтләре өчен

$$|f(x) - A| < \varepsilon \tag{6.3}$$

тигезсезлеге үтәлерлек $\delta > 0$ саны табылса, A саны $f(x)$ функциясенең x_0 ноктасындагы чикләмәсе дип атала.

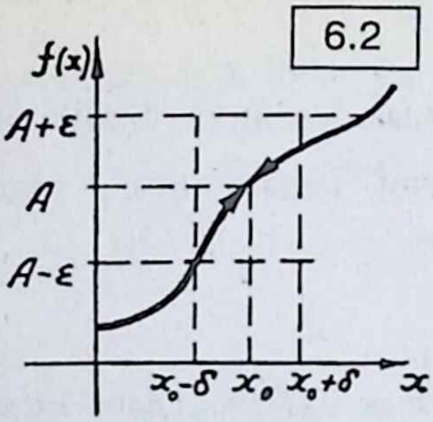
Бу билгеләмәне болай язалар: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ яки $x \to x_0$ булганда $f(x) \to A$ була дип әйтәләр.

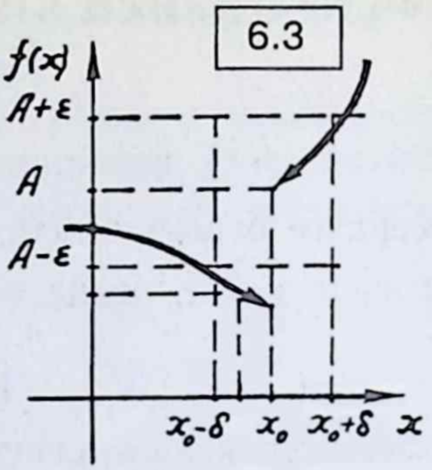
(6.2) тигезсезлеге $x_0 - \delta < x < x_0 + \varepsilon$ тигезсезлекләренә, (6.3) тигезсезлеге $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ тигезсезлекләренә эквивалент. Шулай итеп, әгәр $x \to x_0$ булганда, A саны $f(x)$ функциясенең чикләнмәсе булса, ул вакытта x_0 ноктасының δ-тирәлегенә кергән барлык x лар өчен $f(x)$ функциясенең тиңдәшле кыйммәтләре A ноктасының ε тирәлегендә була. δ ның зурлыгы бирелгән ε га бәйле. Әгәр ε кечерәйсә δ да кечерәя.

6.2 рәсемендә чикләмәсе булган $f(x)$ функциясе, ә 6.3 рәсемендә x_0 ноктасында чикләмәсе булмаган функция сурәтләнгән. Соңгы очракта бирелгән $\varepsilon > 0$ өчен x_0 ноктасының бернинди дә δ-тирәлеген (6.3) шартын канәгатьләндерерлек итеп табып булмый.

Мисал. $\lim\limits_{x \to 3}(2x + 1) = 7$ икәнен исбатлагыз.

Биредә $x_0 = 3$, $A = 7$, $f(x) = 2x + 1$. Бирелгән $\varepsilon > 0$ өчен (6.3) тигезсезлеге түбәндәгечә була $|(2x + 1) - 7| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < 2x - 6 < \varepsilon \Leftrightarrow -\frac{\varepsilon}{2} < x - 3 < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow |x - 3| < \frac{\varepsilon}{2}$. Нәтиҗәдә, (6.2) тигезсезлегенә тиңдәш итеп $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$ икәнен табабыз.





Гомумән әйткәндә, функциянең ноктадагы чикләмәсен ул чикләмәнең билгеләмәсеннән чыгып исәпләү җиңел түгел. Мисал өчен $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$ икәнен чикләмә билгеләмәсен кулланып исбатлап карагыз. Шунда билгеләмәдән чыгып чикләмә табуның ни дәрәҗәдә авыр икәненә төшенерсез. Шуның өчен практикада түбәндәге теоремалардан файдаланып эш итәләр.

2.1. Чикләмәләр турында төп теоремалар

Әгәр $f(x)$ һәм $g(x)$ функцияләренең x_0 ноктасында чикләмәләре булса, бу функцияләрнең суммалары (аермалары) һәм тапкырчыгышларының да x_0 ноктасында чикләмәләре була:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x).$

2. $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \lim\limits_{x \to x_0} g(x).$

Беренче нәтиҗә. $\lim\limits_{x \to x_0} \left(cf(x)\right) = c \lim\limits_{x \to x_0} f(x).$

Икенче нәтиҗә. $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\varphi(x)\right)^n = \left(\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)\right)^n.$

3. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)} \quad \left(\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) \neq 0\right).$

Мисал. $x \to 1$ булганда $f(x) = x^4 + 2x + 1$ функциясенең чикләмәсен табабыз.

$$\lim_{x\to 1}\left(x^4 + 2x + 1\right) = \lim_{x\to 1} x^4 + \lim_{x+1} 2x + \lim_{x\to 1} 1 =$$

$$= (\lim_{x\to 1} x)^4 + 2\lim_{x\to 1} x + 1 = 1^4 + 2\cdot 1 + 1 = 4.$$

2.2. Аныксызлыкны ачу турында искәрмә

$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ чикләмәсен исәпләргә кирәк булсын.

Әгәр $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$ булса, ул вакытта $\left(\frac{0}{0}\right)$ рәвешле аныксызлык була. Бу аныксызлык бердәй рәвешүзгәртүләр ярдәмендә барлык $x \neq x_0$ өчен дә ачыклана ала. Бу очракта $f(x)$ һәм $\varphi(x)$ функцияләре $x \to x_0$ булганда чиксез кечкенәләр дип аталалар.

Мисал. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-x^2}{1-x^3}$ чикләмәсен табабыз.

Турыдан-туры вакланманың чикләмәсе турындагы теореманы кулланып булмый, чөнки ваклаучының чикләмәсе нульгә тигез. Аныксызлыкны ачу өчен вакланманың рәвешен үзгәртәбез:

$$\frac{1-x^2}{1-x^3} = \frac{(1-x)(1+x)}{(1-x)\left(1+x+x^2\right)} = \frac{1+x}{1+x+x^2}.$$

Ул чакта $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-x^2}{1-x^3} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1+x}{1+x+x^2} = \frac{\lim(1+x)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(1+x+x^2\right)} = \frac{1+1}{1+1+1} = \frac{2}{3}.$

$F(x) = \frac{1-x^2}{1-x^3}$ һәм $\Phi(x) = \frac{1+x}{1+x+x^2}$ барлык $x \neq 1$ өчен бердәй тигез икәнен әйтеп китик. Ә $x = 1$ булганда $F(x)$ функциясе аныксыз, ягъни билгеләнмәгән, ә $\Phi(x)$ барлык x лар өчен дә билгеләнгән функция. Ләкин чикләмәнең билгеләмәсе буенча, функциянең $x = 1$ ноктасында билгеләнгән яки билгеләнмәгән булуы мөһим түгел, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, $(0, \infty)$, $(\infty, -\infty)$ рәвешле аныксызлыклар бердәй рәвешүзгәртү ысулы белән ачыкланалар. Мисаллар караганга кадәр түбәндәге билгеләмәне кертик.

Билгеләмә. Әгәр теләсә нинди иң зур $B > 0$ саны өчен дә, $|x - x_0| < \delta(x \neq x_0)$ шартын канәгатьләндерүче барлык x лар өчен

$|f(x)| > B$ тигезсезлеге үтәлерлек $\delta(B) > 0$ саны булса, $f(x)$ функциясе $x \to x_0$ булганда чиксез зур функция дип атала.

Мәсәлән, $f(x) = \frac{1}{x^2}$ функциясе $x \to 0$ булганда чиксез зур зурлык була. (Моны билгеләмәдән чыгып исбатлагыз.)

$(\infty - \infty)$ рәвешле аныксызлык чишүгә бер мисал карыйк.

Мисал. $\lim\limits_{x \to 2}\left(\frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3}\right)$ чикләмәсен табыгыз. Җәяләр эчендәге аңлатманың рәвешен үзгәртеп табабыз:

$$\frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3} = \frac{1}{2-x} - \frac{12}{(2-x)(4+2x+x^2)} = \frac{1}{2-x}\left(1 - \frac{12}{4+2x+x^2}\right) =$$

$$= \frac{x^2+2x-8}{(2-x)(4+2x+x^2)} = \frac{-(2-x)(x+4)}{(2-x)(4+2x+x^2)} = -\frac{x+4}{x^2+2x+4}.$$

Шуның өчен $\lim\limits_{x \to 2} \frac{-(x+4)}{x^2+2x+4} = -\frac{2+4}{4+4+4} = -\frac{1}{2}.$

2.3. Функциянең ноктадагы өзлексезлеге

Беренче билгеләмә. Әгәр

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{6.4}$$

булса, $f(x)$ функциясе x_0 ноктасында өзлексез дип атала (x_0 ноктасы $f(x)$ функциясенең өзлексезлек ноктасы дип атала).

Тулайрак бу билгеләмә түбәндәгене аңлата:

1) функция x_0 ноктасында һәм аның тирәлегендә билгеләнә;

2) функциянең $x \to x_0$ өчен чикләмәсе була;

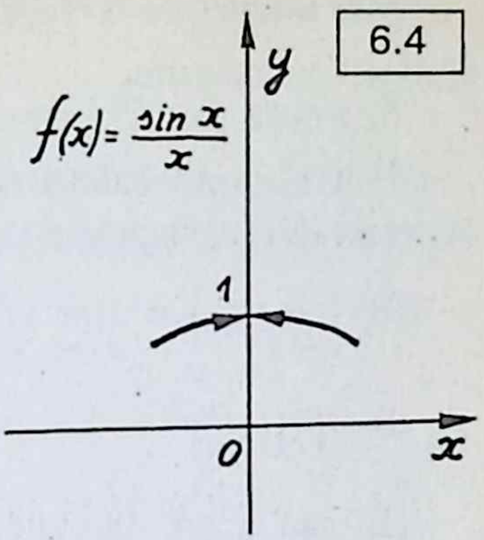
3) бу чикләмә функциянең турыдан-туры исәпләп тапкан кыйммәтенә тигез.

(6.4.) формуласын болай язарга була:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right) \tag{6.5}$$

Шулай итеп, өзлексез функциянең чикләмәсен x_0 ноктасында турыдан-туры исәпләп табалар. Мәсәлән, $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = \sin 0 = 0.$

Искәрмә. Әгәр x_0 ноктасында бу өч шартның берсе генә үтәлмәсә дә, x_0 ноктасы $f(x)$ функциясенең өзелү ноктасы дип атала. 6.4—6.6 рәсемнәрендә бу шартларның үтәлмәү очраклары сурәтләнгән. 6.4 рәсемендә $f(x)$ функциясенең чикләмәсе $x \to 0$ булганда бергә тигез, ләкин функция $x_0 = 0$ булганда аныксыз була. 6.5 рәсемендә $x \to 0$ булганда чикләмә булмый һәм $f(x)$ $x_0 = 0$ ноктасында аныклы түгел. 6.6 рәсемендә $x \to 1$ булганда функциянең чикләмәсе бар һәм ул $\frac{1}{2}$ гә тигез, функция $x_0 = 1$ булганда бирелгән, ләкин $\lim\limits_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$.

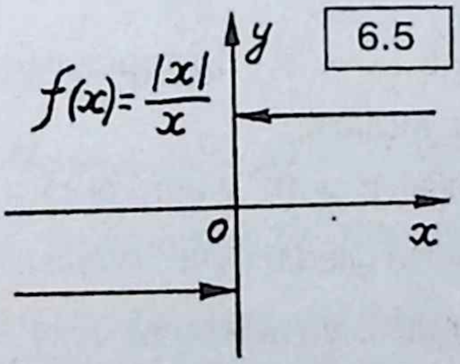


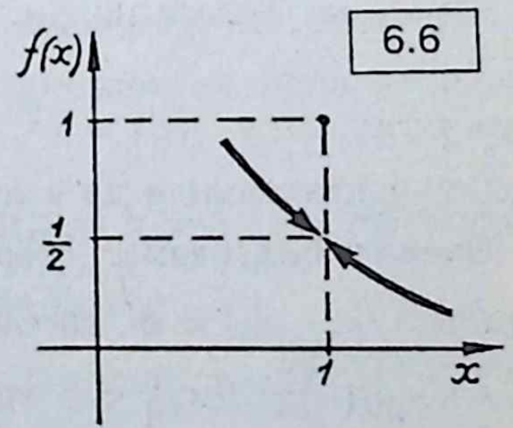
Функциянең ноктадагы өзлексезлегенә икенче билгеләмә бирергә була, аның өчен (6.4) формуласын түбәндәге рәвештә язык:

$\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0)\right) = 0$ яки

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0)\right) = 0 \qquad (6.6)$$

Әйтик, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, ул чакта (6.6) $\lim\limits_{x \to 0} \Delta y = 0$ рәвешен ала.





Икенче билгеләмә. Әгәр аргументның чиксез кечкенә Δx үсемтәсенә функциянең чиксез кечкенә Δy үсемтәсе тиңдәш булса, $f(x)$ функциясе x_0 ноктасында өзлексез функция дип атала.

Мисал. $x_0 = 3$ ноктасында $f(x) = x^2$ функциясенең өзлексез булуын исбатлыйк.

Беренче юл (беренче билгеләмә буенча).

1) $f(x) = x^2$ санлы турының барлык нокталарында да билгеләнгән булганлыктан, беренче шарт үтәлә.

2) $\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} x^2 = \lim_{x \to 3} x \cdot \lim_{x \to 3} x = 3 \cdot 3 = 9.$

3) $f(3) = 3^2 = 9.$

Шулай итеп, барлык өч шарт та үтәлә, димәк, $f(x) = x^2$ $x_0 = 3$ ноктасында өзлексез.

Икенче юл (икенче билгеләмә буенча).

Функциянең x_0 ноктасындагы Δx үсемтәсенә тиңдәш Δy үсемтәсен исәплик: $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2 = \Delta x(2x_0 + \Delta x)$, $x_0 = 3$ ноктасындагы функциянең үсемтәсе була:

$$\Delta y \Big|_{x_0 = 3} = \left(2x_0\Delta x + \Delta x^2\right)\Big|_{x_0 = 3} = 6\Delta x + \Delta x^2.$$

Моннан: $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y \Big|_{x_0 = 3} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(6\Delta x + \Delta x^2\right) = 6 \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + (\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x)^2 = 0.$

Димәк, $f(x) = x^2$ функциясе $x_0 = 3$ ноктасында өзлексез була.

Искәрмә. Теләсә нинди x_0 өчен дә $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ булуын күрү авыр түгел, ә бу $f(x) = x^2$ функциясенең $(-\infty, \infty)$ интервалының барлык нокталарында да өзлексез булуын аңлата.

Өченче билгеләмә. Әгәр теләсә нинди $\varepsilon > 0$ өчен $\delta(\varepsilon) > 0$ табылып, $|x - x_0| < \delta$ тигезсезлеген канәгатьләндерүче барлык x лар өчен $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ тигезсезлеге үтәлсә, ул вакытта $f(x)$ x_0 ноктасында өзлексез функция дип атала (бу билгеләмәне функциянең чикләмә билгеләмәсе белән чагыштырыгыз).

Әгәр $f(x)$ һәм $\varphi(x)$ функцияләре $x = x_0$ ноктасында өзлексез булсалар, бу ноктада аларның алгебраик суммасы $f(x) \pm \varphi(x)$, тап-

кырчыгышы $f(x)\varphi(x)$, һәм $\varphi(x_0) \neq 0$ булгандагы чагыштырмасы $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ өзлексез була.

Дүртенче билгеләмә. Әгәр $f(x)$ функциясе l аралыгының һәр ноктасында өзлексез булса, функцияне бу аралыкта өзлексез диләр.

Төп элементар функцияләр:

1) $y = \text{const}$ — даими функция;

2) $y = x^{\alpha}(\alpha \in R)$ — дәрәҗәле;

3) $y = a^{x}(a > 0,\ a \neq 1)$ — күрсәткечле;

4) $y = log_a x(a > 0,\ a \neq 1)$ — логарифмик;

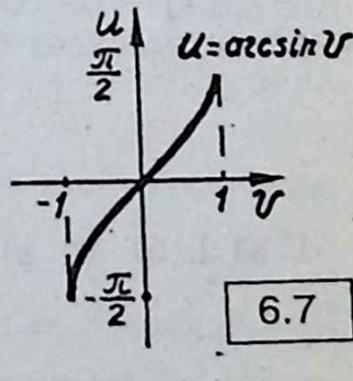
5) $y = \sin x$, $y = \cos x$ $y = \text{tg}x$, $y = \text{ctg}x$ — тригонометрик;

6) $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \text{arctg}x$, $y = \text{arcctg}x$ кире тригонометрик функцияләр үзләренең билгеләнү өлкәләрендә өзлексез функцияләр булалар (бу өлкәләрне исегезгә төшерегез).

Мисал. $f(x) = \frac{\cos x}{x^3+1}$. Бу функция $x = -1$ ноктасында билгеләнмәгән. Ул саннар турысының $x = -1$ ноктасыннан башка барлык нокталарында өзлексез функция булып тора. Бу функция — тригонометрик функция белән өченче дәрәҗә күпбуынның өлеше.

Бишенче билгеләмә. U — $y = f(u)$ функциясенең билгеләнү өлкәсе, ә X — $u = \varphi(x)$ функциясенең билгеләнү өлкәсе булсын. Әйтик, һәрбер $x \in X$ ка $u \in U$ зурлыгының кыйммәте тиңдәш килсен. Бу очракта X өлкәсендә x үзгәрешлесенең катлаулы функциясе $y = f(\varphi(x))$ (яки f һәм φ функцияләренең композициясе) бирелгән диләр.

Мисал. $y = ln(x^2 - 1)$. Бирелә $u = \varphi(x) = x^2 - 1$. $y = f(u) = lnu$. $\varphi(x)$ функциясе теләсә нинди x өчен дә билгеләнгән; $f(u)$ функциясе барлык $u = x^2 - 1 > 0$ өчен билгеләнгән. Димәк, катлаулы функциянең билгеләнү өлкәсе $|x| > 1$ тигезсезлеге белән бирелә.



6.7

Төп элементар функцияләрнең теләсә никадәр сандагы композицияләре булуы мөмкин.

Мәсәлән, әгәр $y = f(u)$, $u = \varphi(V)$, $V = g(x)$ булса, ул вакытта $y = f(\varphi(g(x)))$ катлаулы функциясе була ала.

Мисал. $y = lg\arcsin(x + 1)$ катлаулы функциясенең билгеләнү өлкәсен табыйк. Биредә $y = lgu$, $u = \arcsin V$, $V = x + 1$. Билгеләнү өлкәсе (6.7 рәс.): $u = \arcsin V = 0 \Leftrightarrow 0 < V \leq 1 \Leftrightarrow 0 < x + 1 \leq 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -1 < x \leq 0$.

Алтынчы билгеләмә. Әгәр функция төп элементар функцияләрдән чикле сандагы арифметик гамәлләр һәм катлаулы функцияләр ярдәмендә төзелсә, андый функция элементар функция дип атала.

Шулай итеп, соңгы өч мисалда каралган функцияләр элементар функцияләр була. Элементар функцияләрнең үзләре билгеләнгән өлкәдә өзлексез булулары исбат ителгән.

Күнегүләр

1. Чикләмәләрне исәпләгез:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

в) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^3+27}{x+3}$; г) $\lim\limits_{x \to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$;

д) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$; е) $\lim\limits_{x \to -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$;

ж) $\lim\limits_{x \to 3}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9}\right)$; з) $\lim\limits_{x \to 1}(1 - x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$;

и) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$; к) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}$.

2. Беренче мөһим (үрнәк) чикләмәне исбатлагыз: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

3. $f(x) = x^3$ функциясенең санлы турының барлык ноктадарында да өзлексез булуын исбатлагыз.

Җаваплар

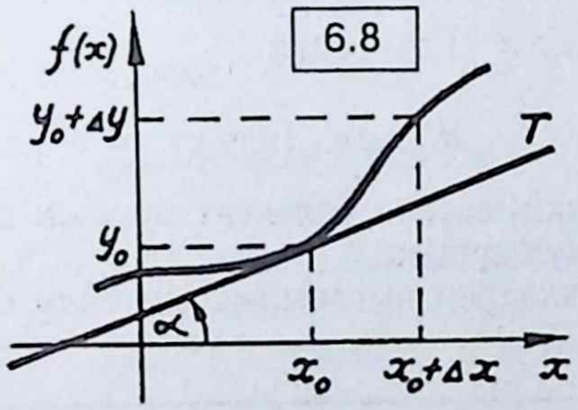
1. а) 1; б) $\frac{2}{3}$; в) 27; г) $\frac{1}{4}$; д) $\frac{1}{3}$; е) -2; ж) $\frac{1}{6}$; з) $\frac{2}{\pi}$; и) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; к) 2.

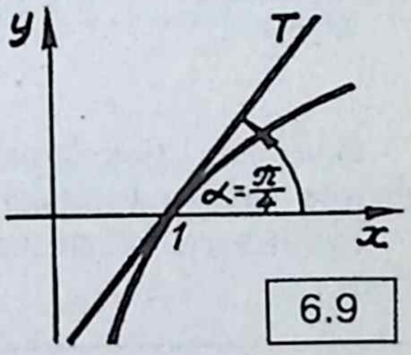
3. ФУНКЦИЯНЕҢ ЧЫГАРЫЛМАСЫ

Билгеләмә. $f(x)$ функциясенең x_0 ноктасындагы чыгарылмасы дип, Δx нульгә омтылганда, функция үсемтәсенең аргумент үсемтәсенә чагыштырудан хасил булган вакланманың чикләнмәсе атала:

$$y'(x_0) = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Ниндидер ноктада чыгарылмасы булган функция шул ноктада дифференциалланучы функция дип атала. Әлеге функциянең чыгарылмасын табу дифференциаллау дип атала. Әгәр x_0 ноктасында $f(x)$ функциясенең чыгарылмасы булса, бу ноктада $f(x)$ нын графигына орынма да билгеләнә, аның почмагы коэффициенты $f'(x_0)$ гә тигез була. Чыгарылманың геометрик мәгънәсе менә шуннан гыйбарәт тә инде (6.8 рәс.).





Орынманың тигезләмәсе

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \tag{6.7}$$

рәвешендә була. Биредә $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$.

Мисал. $x = 1$ ноктасында $y = \ln x$ функциясенең графигына булган орынманың тигезләмәсен табыйк. Биредә $x_0 = 1$, $y_0 = 0$.

$f'(1) = (\ln x)'\big|_{x=1} = \frac{1}{x}\Big|_{x=1} = 1$. (6.7) формуласын файдаланып, орынманың тигезләмәсен табабыз (6.9 рәс.).

Искәрмә. Әгәр x_0 ноктасында $f(x)$ графигының орынмасы ординаталар күчәренә параллель булса (вертикаль орынма), ул вакыт-

та $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$ була алмый, чөнки бу очракта функциянең чыгарылмасы x_0 ноктасында чиксезлеккә әверелә (6.13 рәс.).

Әгәр $f(x)$ функциясе ниндидер бер аралыкта билгеләнсә һәм бу аралыкның һәр ноктасында чыгарылмасы булса, ул вакытта бу чыгарылма шул ук аралыкта билгеләнгән функция була.

Мисаллар. а) $y = f(x) = x^3$ функциясенең чыгарылмасын табыйк. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3 = (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)\Delta x$. Ул чакта $(x^3)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) = 3x^2 + 3x \cdot 0 + x^2 = 3x^2$

б) $y = \cos x$ функциясенең чыгарылмасын табыйк. $\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$ булганлыктан, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x \cdot 1 = -\sin x$.

Җавап. $(\cos x)' = -\sin x$.

Искәрмә. Без биредә синус функциясенең өзлексез булуын һәм беренче мөһим (үрнәк) чикләмәне кулландык.

Түбәндәге таблицадагы функцияләрнең чыгарылмасын белү бик кирәк:

$f(x)$	$x^\alpha (\alpha \in R)$	a^x	$\log_a x$	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
$f'(x)$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$a^x \ln a$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

3.1. Чыгарылмаларны исәпләү кагыйдәләре

Әгәр $f(x)$ һәм $\varphi(x)$ дифференциаллансалар, ягъни аларның $f'(x)$ һәм $\varphi'(x)$ булса, ул вакытта:

1) $(f(x) \pm \varphi(x))' = f'(x) \pm \varphi'(x)$;

2) $\left(cf(x)\right)' = cf'(x)$;

3) $\left(f(x)\cdot\varphi(x)\right)' = f'(x)\varphi(x) + f(x)\varphi'(x)$;

4) $\left(\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\varphi(x)-\varphi'(x)f(x)}{\varphi^2(x)}\left(\varphi(x) \neq 0\right)$.

3.2. Катлаулы функцияне дифференциаллау

Әйтик, $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, ягъни $y = f(\varphi(x)) = y(x)$ функциясе катлаулы функция булсын. Әгәр монда y'_u һәм u'_x чыгарылмалары булса, катлаулы функцияне дифференциаллау кагыйдәсе түбәндәгечә языла: $y'_x = y'_u u'_x$.

Шулай итеп, катлаулы функциянең төп аргумент буенча булган чыгарылмасы бу функциянең арадаш аргументы u буенча чыгарылмасы белән бу арадаш аргументның төп аргумент x буенча чыгарылмасының тапкырчыгышына тигез.

Мисаллар. а) Әйтик, $y = x^{\alpha}$. $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$ икәнен исбатлагыз, биредә $(\alpha \in R,\ x > 0)$.

Төп логарифмик бердәйлекне $\left(a^{\log_a b} = b\right)$ файдаланабыз: $y = x^{\alpha} = e^{lgx^{\alpha}} = e^{\alpha lgx}$. Әйтик, $u = \alpha lnx$, ул чакта $y = e^u$, $y'_u = e^u$, $u'_x = \frac{\alpha}{x}$. Димәк, $y'_x = e^u \cdot \frac{\alpha}{x} = e^{\alpha lnx}\frac{\alpha}{x} = x^{\alpha}\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$, шуны исбатлау кирәк иде дә.

б) $y = \sin\left(1 - 3x^2\right)$ функциясенең чагарылмасын табыгыз. Биредә $u = 1 - 3x^2$, $y = \sin u$; ул чакта $y'_x = (\sin u)'_u\left(1 - 3x^2\right)'_x = -6x\cos u = -6x\cos\left(1 - 3x^2\right)$.

Искәрмә. Катлаулы функцияне дифференциаллау кагыйдәсе теләсә нинди чикле сандагы суперпозиция өчен дә урынлы. Мәсәлән, әгәр өч функциянең суперпозициясе бирелсә, $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = g(x)$, ягъни $y = f(\varphi(g(x)))$ булса, $y'_x = y'_u\ u'_v\ v'_x$.

3.3. Кире функциянең чыгарылмасы

Әйтик, $y = y(x)$ һәм $x = x(y)$ үзара кире функцияләр. y'_x һәм x'_y аларның чыгарылмалары булса, алар бер-берсенә түбәндәгечә бәйле булалар:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}. \qquad (6.8)$$

Мисаллар. а) $y = \sqrt[5]{x}$ функциясенең чыгарылмасын табыгыз.

Бирелгән функциягә кире функция $x = y^5$ була. Ул чакта

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(y^5)'_y} = \frac{1}{5y^4} = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}.$$

б) $(log_a x) = \frac{1}{xlna}$ икәнен исбатлагыз.

$y = log_a x$ булсын ди, ул чакта $x = a^y$ һәм $y'_x = (log_a x)'_x =$

$$= \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(a^y)'_y} = \frac{1}{a^y lna} = \frac{1}{x \cdot lna}.$$

в) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(|x| < 1\right)$ икәнен исбатлагыз.

Биредә $y = \arcsin x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin y = x, \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

(6.8) формуласын файдаланып, табабыз: $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'_y} =$

$$= \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{+\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Монда тамыр алдыннан уңай тамга алынган, чөнки беренче һәм дүртенче чирекләрдә $\cos y > 0$.

Күнегүләр

1. Чыгарылманың билгеләмәсеннән чыгып, функцияләрнең чыгарылмаларын табыгыз: а) $y = \sqrt{x}$ б) $y = \frac{1}{x}$ в) $y = \sin x$.

2. Әгәр $y = \sin x$ булса, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ны табыгыз.

3. Әгәр $f(x) = x^2$ булса, кайсы ноктада $f(x) = f'(x)$ була?

4. Чыгарылмаларны табыгыз: а) $y = \left(x^2 + 2x + 2\right)e^{-x}$;

б) $y = \left(\sqrt{x} + 1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$; в) $y = \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2$;

г) $y = (1 + ln\sin x)^n$; д) $y = 2^{\frac{x}{lnx}}$;

е) $y = log_3\left(x^2 - 1\right)$; ж) $y = x\sin x\cos x$;

з) $y = \sin(\sin x)$; и) $y = x^2 e^{-x^2}$.

5. $y = x - \frac{1}{x}$ функциясе графигына аның абсцисса күчәре белән кисешкән ноктасында үткәрелгән орынманың тигезләмәсен табыгыз.

6. $y = x^3 + x - 2$ сызыгының кайсы нокталарындагы орынма $y = 4x - 1$ турысына параллель була.

7. Җөп функциянең чыгарылмасы так функция, так функциянең чыгарылмасы җөп функция булуын исбат итегез.

8. Исбат итегез: а) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(|x| < 1\right)$.

б) $(\mathrm{arctg}x)' = -\frac{1}{1+x^2}(x \in R)$. в) $\mathrm{arcctg}x = -\frac{1}{1+x^2}(x \in R)$.

Җаваплар

1. а) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; б) $\frac{1}{x^2}$; в) $\cos x$. 2. 0.

3. $x_1 = 0$; $x_2 = 2$. 4. а) $-x^2 e^{-x}$; б) $-\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$;

в) $-\cos x$; г) $n(1 + ln\sin x)^{n-1}\mathrm{ctg}x$;

д) $\frac{ln2(lnx-1)}{ln^2x}$; $2^{x/lnx}$; е) $\frac{2x}{(x^2-1)ln3}$;

ж) $\frac{\sin 2x}{2} + x\cos 2x$; з) $\cos(\sin x)\cos x$; и) $2xe^{-x^2}\left(1 - x^2\right)$.

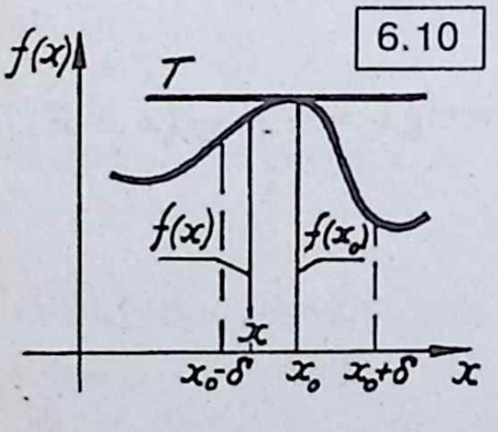
5. $y = 2x - 2$; $y = 2x + 2$. 6. $(1; 0)$, $(-1; -4)$.

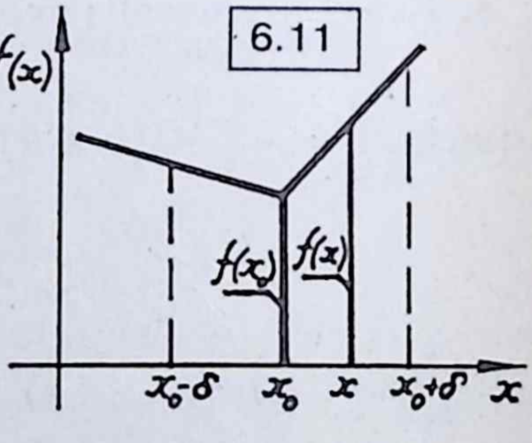
4. ФУНКЦИЯНЕҢ ЭКСТРЕМУМЫ. КИСЕМТӘДӘ ФУНКЦИЯНЕҢ ИҢ ЗУР ҺӘМ ИҢ КЕЧКЕНӘ КЫЙММӘТЕ

Беренче билгеләмә. Әйтик, $f(x)$ функциясе x_0 ноктасында һәм аның ниндидер тирәлегендә билгеләнгән ди. Әгәр бу тирәлектәге барлык x лар өчен дә $f(x_0) > f(x)$ булса, x_0 ноктасы функциянең *максимум ноктасы* дип атала (6.10 рәс.). Әгәр дә $f(x_0) < f(x)$ булса, x_0 функциянең *минимум ноктасы* дип атала (6.11 рәс.).

Икенче билгеләмә. Минимум һәм максимум нокталары — бирелгән функциянең экстремум нокталары, ә функциянең бу нокталардагы кыйммәтләре функциянең *экстремумнары* (латин сүзе "экстремум" татарча "кырый, чик" мәгънәсен аңлата) дип атала.

Шуны билгеләп үтик, әгәр функция $[a, b]$ кисемтәсендә бирелсә, a һәм b нокталары функциянең экстремум нокталары була алмыйлар, чөнки бу ноктлар өчен аларны эченә алган интервал сайлап алып булмый, ә бу интервал тулысынча тикшерелә торган билгеләнү өлкәсенә керергә тиеш.

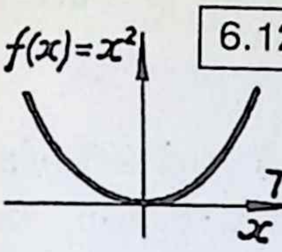




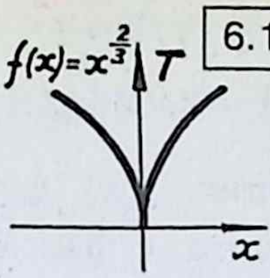
Беренче теорема (экстремум булу өчен кирәкле шарт). Әгәр x_0 — экстремум ноктасы булса, ул вакытта я $f'(x_0) = 0$, я $f'(x_0) = \infty$, я $f'(x_0)$ булмый (6.12—6.14 рәс.)

Бу кирәкле шарт, ләкин җитә торган түгел. Мәсәлән, $f(x) = x^3$ функциясе өчен $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$. Ләкин x_0 экстремум ноктасы түгел (6.15 рәс.).

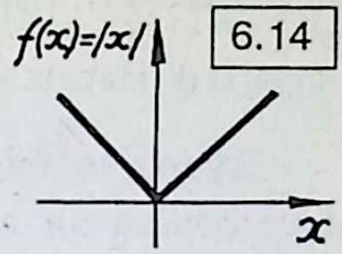
Өченче билгеләмә. Беренче функциянең чыгарылмасы нульгә тигез, чиксез, я булмаган нокталар *критик нокталар* дип атала.



6.12



6.13



6.14

Икенче теорема (экстремум булу өчен җитәрлек шарт).

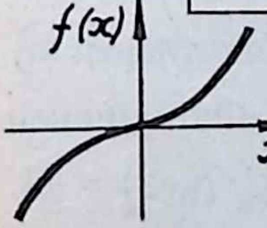
Әгәр барлык $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ өчен, ягъни x_0 ноктасының сул як тирәсенә керүче барлык нокталарда $f'(x) > 0$, ә барлык $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ өчен $f'(x) < 0$ булса, x_0 — максимум ноктасы; әгәр барлык $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ өчен $f'(x) < 0$, ә барлык $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ өчен $f'(x) > 0$ булса, x_0 — минимум ноктасы була. Кыскача әйткәндә, әгәр критик ноктаны үткәндә чыгарылманың тамгасы үзгәрсә, ул вакытта бу нокта экстремум ноктасы була. Бу экстремумның беренче җитәрлек билгесе дип атала.

Мисаллар. а) $f(x) = x^2 - 1$ функциясенең экстремумын табыгыз (6.16 рәс.).

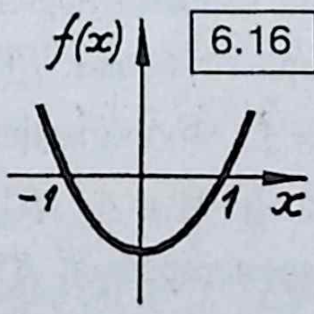
Кирәкле шарт буенча $f(x) = 2x = 0$, ягъни $x_0 = 0$, әгәр $x < 0$ булса, $f'(x) < 0$ була, әгәр дә $x > 0$ булса, ул вакытта $f'(x) > 0$. Димәк, $x_0 = 0$ экстремум ноктасы: $f_{min}(0) = -1$.

б) $f(x) = |x|$ функциясенең экстремумын табыгыз. $x = 0$ ноктасында чыгарылма юк. Димәк, бу нокта критик нокта. Ә графиктан 0 ноктасында функциянең минимумы булуы күренә $f_{min}(0) = 0$ (6.14 рәс.).

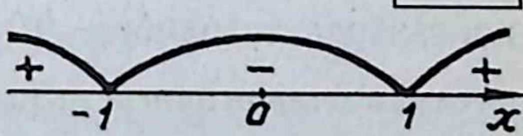
6.15



6.16



6.17



в) $f(x) = x^3 - 3x$ функциясен экстремумга тикшерегез. Биредә $f'(x) = 3x^2 - 3$. Чыгарылманы нульгә тигезләп табабыз: $x_1 = -1$, $x_2 = +1$. Ул чакта $x_1 = -1$ максимум ноктасы; $x_2 = 1$ минимум

ноктасы (6.17 рәсеменнән $f'(x)$ функциясенең тамгалар схемасын карагыз). Нәтиҗәдә, $f_{max}(-1) = 2$, $f_{min}(1) = -2$.

Дүртенче билгеләмә. Әйтик, $f(x)$ функциясе X аралыгында билгеләнгән ди һәм бу аралыкта x_1 һәм x_2 нокталары булып, ул нокталарда $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$ булсын ди. Әгәр барлык $x \in X$ лар өчен $m \le f(x) \le M$ булса, $f(x)$ функциясе X аралыгында үзенең иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләрен x_1 һәм x_2 нокталарында кабул итә диләр.

Искәрмә. Бик күп практик мәсьәләләрне чишү еш кына кисемтәдә өзлексез булган функциянең иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләрен табуга кайтып кала. X аралыгын $[a, b]$ кисемтәсе дип алып, ул кисемтәдә $f(x)$ функциясе өзлексез булса, ул вакытта $f(x)$ үзенең иң зур яки иң кечкенә кыйммәтләрен алырлык нокталарның булуын раслаучы Вейерштрасс теоремасы математик анализ курсларында исбатлана. Бу зур кыйммәтләр я кисемтәнең чикләрендә, ягъни a һәм b нокталарында, я булмаса (a, b) интервалының эчендә була. Максимум һәм минимум билгеләмәләре локаль характерлы, функциянең x_0 ноктасы тирәсендәге тәртибе белән бәйләнгән, ә иң зур, иң кечкенә төшенчәләре глобаль характерлы булуын, функциянең кисемтәдәге тәртибе белән бәйле булуын әйтеп китик.

Кагыйдә. Кисемтәдә критик нокталары чикле санда булган өзлексез функциянең иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләрен табу өчен, аның барлык критик нокталардагы һәм кисемтә очларындагы кыйммәтләрен исәпләргә һәм табылган саннарның иң зурысын һәм иң кечкенәсен сайлап алырга кирәк.

Мисал. $y = f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ функциясенең $[-2, 2]$ кисемтәсендәге иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләрен табыйк.

Чишү. Башта критик нокталарны табабыз: $f'(x) = 4x^3 - 4x = 0$. Моннан $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$. Функциянең кыйммәтләрен бу нокталарда исәплибез: $f(0) = 5$; $f(-1) = 4$, $f(1) = 4$. Функциянең кисемтә очларындагы кыйммәтләрен табабыз: $f(2) = 13$, $f(-2) = 13$. Шулай итеп, функциянең иң зур кыйммәте $M = 13$ кисемтәнең очларында була. Иң кечкенә кыйммәте $m = 4$ эчке, $x = \pm 1$ нокталарында була.

Күнегүләр

1. Функциянең экстремумнарын табыгыз.

а) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$; б) $f(x) = x - ln(1 + x)$;

в) $f(x) = x - ln\left(1 + x^2\right)$; г) $f(x) = x + \sqrt{3 - x}$;

д) $f(x) = x\sin x + \cos x - \frac{x^2}{4}$; $\left(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$.

2. Бирелгән функцияләрнең иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләрен табыгыз.

а) $f(x) = x^3, \quad x \in [-1;\ 3]$;

б) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1, \quad x \in [-1;\ 5]$;

в) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}, \quad x \in R$;

г) $f(x) = \sqrt{x(10 - x)}, \quad x \in [0;\ 10]$;

д) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x, \quad x \in R$.

Җаваплар

1\. а) $f_{max}(0) = 0$; $f_{min}(1) = -1$; б) $f_{min}(0) = 0$;

в) экстремумы юк; г) $f_{max}\left(\frac{11}{4}\right) = \frac{13}{4}$; д) $f_{max}\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) = \frac{6\pi\sqrt{3} - \pi^2 + 18}{36}$;

$f_{min}(0) = 1$.

2\. а) $x = -1$ булганда $m = -1$; $x = 3$ булганда $M = 27$;

б) $x = 1$ булганда $m = -6$; $x = 5$ булганда $M = 266$;

в) $x = -1$ булганда $m = -\frac{1}{2}$; $x = 1$ булганда $M = \frac{1}{2}$;

г) $x = 0$; 10 булганда $m = 0$; $x = 5$ булганда $M = 5$;

д) $x = \frac{\pi}{4}(2k + 1)$ булганда $m = \frac{1}{2}$; $x = \frac{\pi k}{2}$ булганда $M = 1$.

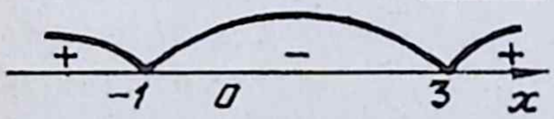
5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАНУЧЫ ФУНКЦИЯНЕҢ МОНОТОНЛЫК АРАЛЫГЫ

Беренче билгеләмә. Әгәр x күплегенә кергән теләсә нинди x_1 һәм x_2 саннары өчен $x_1 < x_2$ тигезсезлегеннән $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$ тигезсезлеге килеп чыкса, $f(x)$ функциясе x күплегендә үсүче (кимүче) функция дип атала.

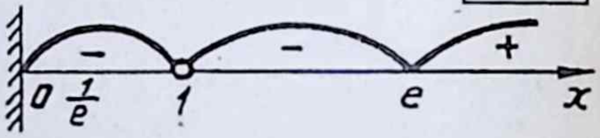
Икенче билгеләмә. Үсүче һәм кимүче функция монотон функция дип атала.

Теорема. (Функциянең монотонлыгы өчен җитәрлек билге.) Әгәр x аралыгының һәр ноктасында да $(x \in X)$ $f'(x) > 0$ булса, бу аралыкта $f(x)$ функциясе үсә; әгәр дә $f'(x) < 0$ булса, ул вакытта бу аралыкта функция кими.

6.18

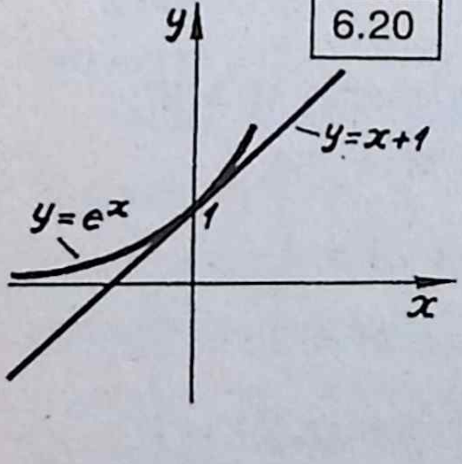


6.19



Мисаллар. а) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$ функциясенең монотонлык араларын табыйк.

Биредә $f'(x) = 6(x^2 - 2x - 3)$. $f(x)$ның тамгалар схемасы 6.18 рәсемендә сурәтләнгән. Шулай итеп, функция $(-\infty; -1)$ һәм $(3; \infty)$ аралыкларында үсә, ә $(-1; 3)$ аралыгында кими.



б) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ функциясенең монотонлык араларын табыйк. $f(x)$ функциясенең $x > 0$, $x \neq 1$ булганда гына билгеләнгән булуын күрсәтеп үтик. $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$. $f(x)$ ның тамгалар схемасы 6.19 рәсемендә сурәтләнгән. Димәк, $(0; 1)$ һәм $(1; e)$ аралыгында функция кими, ә $(e; \infty)$ аралыгында үсә.

в) Нульгә тигез булмаган барлык x лар өчен дә $e^x > 1 + x$ икәнен исбатлагыз.

Исбатлау. Әйтик, $f(x) = e^x - 1 - x$, ул чакта $f'(x) = e^x - 1$. Әгәр $x > 0$ булса, $f'(x) > 0$, $x < 0$ булса, $f'(x) < 0$ була. Димәк, $x = 0$ минимум ноктасы. $f(0) = 0$ булганлыктан, $f(x)$ нульгә тигез булмаган барлык x лар өчен дә нульдән зур була. Димәк, $x \neq 0$ булса, $e^x > 1 + x$ була. Бу тигезсезлекне геометрик яктан күзаллау җиңел: $y = x + 1$ туры сызыгы $y = e^x$ функциясенең графигына $x = 0$ ноктасында орынма булып тора (6.20 рәс.).

6. ФУНКЦИЯНЕ ТИКШЕРҮ

$y = f(x)$ функциясен тикшергәндә чишелергә тиешле төп мәсьәләләрнең берсе булып, бирелгән өлкәдә аның үсү яки кимү аралыкларын табу тора, ә бу, икенче төрле әйткәндә, функциянең үзгәрү тизлеге нульгә $\left(f'(x) = 0\right)$, я булмаса чиксез зурлыкка $\left(f'(x) = \infty\right)$ әйләнү нокталарын табу дигән сүз (ягъни критик нокталарны табу). Функцияне тикшерү аның графигын төзү белән тәмамлана.

Түбәндә функцияне тикшерүнең үрнәк схемасы бирелгән:

1. Функциянең билгеләнү өлкәсен табу.
2. Функциянең җөп, я так булуын, аның графигын ординаталар күчәренә, я координат башлангычына симметрияле булуын тикшерү.
3. Таяну нокталарын, ягъни графикның координата күчәрләрен кисү нокталарын һәм функциянең тамгалары даими булган аралыкларны табу.
4. Функциянең чыгарылмасын табу.
5. Критик нокталарны һәм бу нокталарда функциянең кыйммәтләрен табу.
6. Үсү һәм кимү аралыкларын табу (функциянең чыгарылмасы буенча аның үзгәрүен күрсәткән таблица төзү).
7. Бу табылган нәтиҗәләр буенча график төзү.

Мисал. $y = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x}$ функциясен тикшерәбез һәм аның графигын төзибез.

Чишү. 1. Бу функциянең билгеләнү өлкәсе барлык санлы туры, ягъни $x \in R$, димәк, ул x ның теләсә нинди кыйммәте өчен дә өзлексез функция.

2. Бу так функция, чөнки $f(-x) = -\frac{x}{3} - \sqrt[3]{-x} = -\left(\frac{x}{3} - \sqrt[3]{x}\right) = -f(x)$. Димәк, функциянең графигы координатлар башлангычына

карата симметрияле. Бу тикшерү өлкәсенең күләмен киметергә ярдәм итә: функцияне $x \geq 0$ булганда тикшерү һәм аның графигын төзү җитә, ә калган яртысын соңыннан симметрия үзлеген файдаланып төзибез.

3. Графикның OX күчәре белән кисешү нокталарын табу өчен $y = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x}$ тигезләмәсендә $y = 0$ дип алабыз.

$\frac{x}{3} = \sqrt[3]{x} \Leftrightarrow \frac{x^3}{27} = x \Rightarrow x_1 = 0,\ x_{2,3} = \pm\sqrt{27}$. Димәк, график OX күчәрен $\left(-\sqrt{27}; 0\right)$, $(0; 0)$, $\left(\sqrt{27}; 0\right)$ нокталарында кисә. Бу нокталар функциянең тамгасы даими булган аралыкларны билгели: $\left(-\infty; -\sqrt{27}\right)$, $\left(-\sqrt{27}; 0\right)$, $\left(0; \sqrt{27}\right)$, $\left(\sqrt{27}; +\infty\right)$.

Функциянең тамгалар даимилеге аралыкларын белү өчен һәр аралыкта нинди дә булса бер ноктада аның уңай, я тискәре булуын белү җитә. Без тикшерә торган так функциянең тамгасын $\left(0; \sqrt{27}\right)$ һәм $\left(\sqrt{27}; +\infty\right)$ аралыкларында $x = 1$ һәм $x = 1000$ нокталарында белү җитә: $y(1) = \frac{1}{3} - 1 < 0;\ y(1000) = \frac{1000}{3} - 10 > 0$.

Димәк, $\left(0; \sqrt{27}\right)$ аралыгында функция тискәре, $\left(\sqrt{27}; +\infty\right)$ аралыгында уңай кыйммәтләр ала, тиңдәш рәвештә график OX күчәренең астында һәм өстендә була. Функция так булганлыктан, $\left(-\infty; -\sqrt{27}\right)$ аралыгында тискәре; $\left(-\sqrt{27}; 0\right)$ аралыгында уңай кыйммәтләр ала. Табылган нәтиҗәләрне таблица рәвешендә күрсәтик:

x	$-\infty; -\sqrt{27}$	$-\sqrt{27}$	$-\sqrt{27}; 0$	0	$0; \sqrt{27}$	$\sqrt{27}$	$\sqrt{27}; +\infty$
y	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

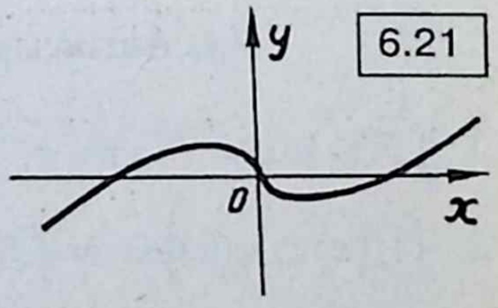
4. $y' = \frac{1}{3} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow y' = \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

5. $x = \pm 1$ булса, $y' = 0$ була, $x = 0$ булганда y' булмый, x нульгә якынлашканда y' чиксез зурлыкка әйләнә. Ординатлар күчәре графикка орынма булып тора. Бу критик нокталар функциянең билгеләнү өлкәсен $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 1)$, $(1; +\infty)$ монотонлык аралыкларына бүләләр. Бу аралыкларда y' үзенең тамгасын саклый.

Димәк, функция я үсә, я кими. Әгәр бирелгән аралыкта y' булса, ул чакта функция үсә (кими). Әгәр критик ноктаны үткәндә y' үзенең тамгасын үзгәртсә, бу экстремум ноктасы була, әгәр үзгәртмәсә, экстремум ноктасы булмый. Монотонлык аралыгында y' ның тамгасын белү өчен, югарыда күрсәтелгәнчә, аның кыйммәтен бер ноктада белү җитә: $x = \frac{1}{2}$ булса, $y' < 0$, $X = 2$ булса, $y' > 0$ була. Димәк, $(0;\ 1)$ аралыгында функция кими, $(1; +\infty)$ аралыгында үсә, $x = 1$ булганда минимум була. $y_{min}(1) = \frac{1}{3} - \sqrt[3]{1} = -\frac{2}{3}$. Табылган нәтиҗәләрне таблица рәвешендә күрсәтәбез:

x	$-\infty; -1$	-1	$-1; 0$	0	$0; 1$	1	$1; +\infty$
y'	+	0	–	∞	–	0	+
y	↗ үсә	$\frac{2}{3}$	↘ кими	0	↘ кими	$-\frac{2}{3}$	↗ үсә
		max		экс юк		min	

6. Турыпочмаклы координатлар системасында абциссалары критик нокталар булган нокталарны $(0; 0)$, $\left(1; -\frac{2}{3}\right)$ һәм таяну нокталарын (күчәрне кисүче) $\left(\sqrt{27}; 0\right)$ төзибез, $(0; 0)$ ноктасында OY күчәре графикның орынмасы булып тора, чөнки $\left(y'(0) = \infty\right)$, ә $\left(1; -\frac{2}{3}\right)$ ноктасында орынма $0X$ күчәренә параллель була $y' = 0$ (6.21 рәс.).



6.21

$x < 0$ булганда функциянең графигын $(0; 0)$ ноктасына карата симметрик итеп төзибез. Нәтиҗәдә, $(-\infty; -1)$ аралыгында функциянең үсүен, $(-1; 0)$ аралыгында кимүен табабыз. Өстәвенә $y_{max}(-1) = \frac{2}{3}$ була, ә $(0; 0)$ ноктасында экстремум юк дигән нәтиҗәгә киләбез.

Искәрмә. Әгәр функция симметрик булмаса, ул вакытта функцияне ул бирелгән барлык өлкәдә тикшерү үткәрелә.

7. АНЫКСЫЗ ҺӘМ АНЫК ИНТЕГРАЛЛАР. БЕРЕНЧЕЛ ФУНКЦИЯ ҺӘМ АНЫКСЫЗ ИНТЕГРАЛ

Беренче билгеләмә. Бирелгән өлкәдә барлык x лар өчен $F'(x) = f(x)$ булса, $f(x)$ функциясе бу өлкәдә $f(x)$ функциясе өчен беренчел функция дип атала.

Мәсәлән, $f(x) = x^2$ өчен $F(x) = \frac{x^3}{3}$, ә $f(x) = \sin x$ өчен $F(x) = -\cos x$ беренчел функцияләр.

Теорема. $F(x)$ функциясе ниндидер бер өлкәдә $f(x)$ функциясенең беренчел функциясе була.

1) C нинди генә даими сан булса да, $F(x) + c$ функциясе шул ук өлкәдә $f(x)$ функциясенең беренчел функциясе була.

2) $f(x)$ функциясенең шул ук өлкәдәге теләсә кайсы $\phi(x)$ беренчел функциясен $F(x) + c$ рәвешендә язарга мөмкин.

Икенче билгеләмә. Әйтик, $f(x)$ өчен $F(x)$ беренчел функция булсын ди. Ул чакта $f(x)$ функциясе өчен барлык беренчел функцияләрне эченә алган $F(x) + c$ рәвешле аңлатма аныксыз интеграл дип атала һәм

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

символы белән тамгалана. Биредә $\int$ тамгасы интеграл тамгасы дип, $f(x)dx$ интеграл асты аңлатмасы дип, $f(x)$ — интеграл асты функциясе дип, ә x үзгәрешлесе — интеграллау үзгәрешлесе дип атала.

7.1. Аныксыз интегралның төп үзлекләре

1. $\int F'(x)dx = F(x) + c.$ 2. $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx.$

3. $\int [f(x) \pm \varphi(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx.$

4. Әгәр $\int f(x)dx = F(x) + c$ булса,

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + c \text{ була.}$$

Бу үзлекләр аныксыз интегралның һәм беренчел функциянең билгеләмәсеннән чыгып җиңел исбатлана.

7.2. Интеграллар таблицасы

1. $\int 0dx = c.$ 2. $\int 1dx = x + c.$ 3. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c(\alpha \neq -1).$

4. $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + c.$ 5. $\int \sin x dx = -\cos x + c.$

6. $\int \cos x dx = \sin x + c.$ 7. $\int a^x dx = a^x/lna + c.$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg}x + c.$ 9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{ctg}x + c.$

Бу формулаларны исбатлау өчен, аларның уң ягыннан алган чыгарылманың интеграл асты функциясенә тигез икәнен күрсәтү җитә. (Монысын үзегез эшләгез.)

Мисал. Аныксыз интегралны исәпләгез:

$$\int\left(5x^4 + 2\cos^2 2x - 2^x\right)dx.$$

Икенче һәм өченче үзлекләр буенча табабыз:

$$\int\left(5x^4 + 2\cos^2 2x - 2^x\right)dx = 5\int x^4 dx + 2\int \cos^2 2x dx - \int 2^x dx.$$

3 һәм 7 формулаларны кулланып беренче һәм өченче интегралларны табабыз. $\int x^4 dx = x^5/5 + c_1;$ $\int 2^x dx = 2^x/ln2 + c_3;$

Икенче интегралны исәпләү өчен, косинусның икеләтелгән почмак формуласын файдаланабыз: $2\cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$.

$$\int \cos^2 2x dx = \int \frac{1+\cos 4x}{2} dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 4x dx = \frac{x}{2} + C_2' +$$

$+\frac{1}{2}\frac{\sin 4x}{4} + C_2'' = \frac{x}{2} + \frac{\sin 4x}{8} + C_2,$ биредә $C_2' + C_2'' = C_2$ (монда без дүртенче үзлекне файдаландык). Шулай итеп, $\int\left(5x^4 + 2\cos^2 2x -\right.$ $\left.- 2^x\right)dx = 5\left(\frac{x^5}{5} + c_1\right) + 2\left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 4x}{4} + c_2\right) - \left(\frac{2^x}{ln2} + c_3\right) = x^5 + x +$ $+\frac{\sin 4x}{2} - \frac{2^x}{ln2} + c,$ биредә $c = 5c_1 + 2c_2 - c_3$.

7.3. Анык интеграл

Әйтик, $[a, b]$ кисемтәсендә $f(x)$ функциясе бирелсен. Түбәндәге гамәлләрне үтик:

1. $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$ нокталары ярдәмендә $[a, b]$ кисемтәсен ирекле рәвештә n кисәккә бүлик.

2. $[x_{i-1}, x_i]$ кисемтәләренең һәркайсында берәр нокта алыйк: ξ_i: $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

3. Интеграллар суммасын төзик:

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$ биредә $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

$f(x)$ функциясе өчен интеграллар суммасын чиксез күп юллар белән төзү мөмкинлеге ап-ачык. $[a, b]$ кисемтәсенең бүленү адымы λ дип $[x_{i-1}, x_i]$ кисемтәләренең иң озынын атыйбыз: $\lambda = max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\}$.

Билгеләмә. Әгәр $\lambda \to 0$ булганда интеграллар суммасы өзлеклелегенең чикләмәсе булып, ул $[a, b]$ кисемтәсен нинди юл белән бүлүгә һәм $[x_{i-1}, x_i]$ кисемтәсендә нинди нокта алуга бәйле булмаса, бу чикләмә $f(x)$ функциясенең $[a, b]$ кисемтәсендәге анык интегралы дип атала һәм

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

символы белән тамгалана.

$f(x)$ функциясен $[a, b]$ кисемтәсендә интегралланучы функция дип атыйлар, a һәм b саннары тиңдәш рәвештә интегралның түбәнге һәм югары интеграллау чикләре дип атала. $[a, b]$ кисемтәсендәге һәрбер өзлексез функциянең интегралланучы функция булуы галимнәр тарафыннан исбат ителгән.

Мисал. $\int_0^1 x^2 dx$ интегралын исәпләгез.

$[0, 1]$ кисемтәсендә $f(x) = x^2$ өзлексез функция булганлыктан, ул интегралланучы функция була. $\Delta x_i = \Delta x = \frac{1}{n}$ дип (ягъни интеграллау кисемтәсен тигез кисәкләргә бүләбез) һәм $\xi_1 = x_i = i\Delta x$ дип алырга була. $f(\xi_1) = \xi_i^2 = x_i^2 = (i \cdot \Delta x)^2$ булганлыктан,

$$\int_0^1 x^2dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Delta x_i = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n}(i\Delta x)^2\Delta x =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} i^2\Delta x^3 = \lim_{\Delta x\to 0}\Delta x^3\sum_{i=1}^{n} i^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n} = \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2 = \frac{1}{3}.$$

Бу мисалдан күренгәнчә, хәтта чагыштырмача бик гади очракта да анык интегралны анык билгеләмәсеннән чыгып исәпләү шактый авыр эш. Мондый төрдәге мәсьәләләрне чишүнең башка эффектлы юллары да бар. Ул юл Ньютон-Лейбницның бик мөһим формуласын файдалануга нигезләнгән:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

биредә $F(x)$ функциясе $f(x)$ өчен беренчел функцияләрнең берсе. Шулай итеп, анык интегралны исәпләү өчен интеграл асты функциясенең берәр беренчел функциясен табу җитә.

Беренче искәрмә. $F(b) - F(a)$ аермасын $F(x)\Big|_a^b$ символы белән тамгалыйлар. Ул чакта $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$.

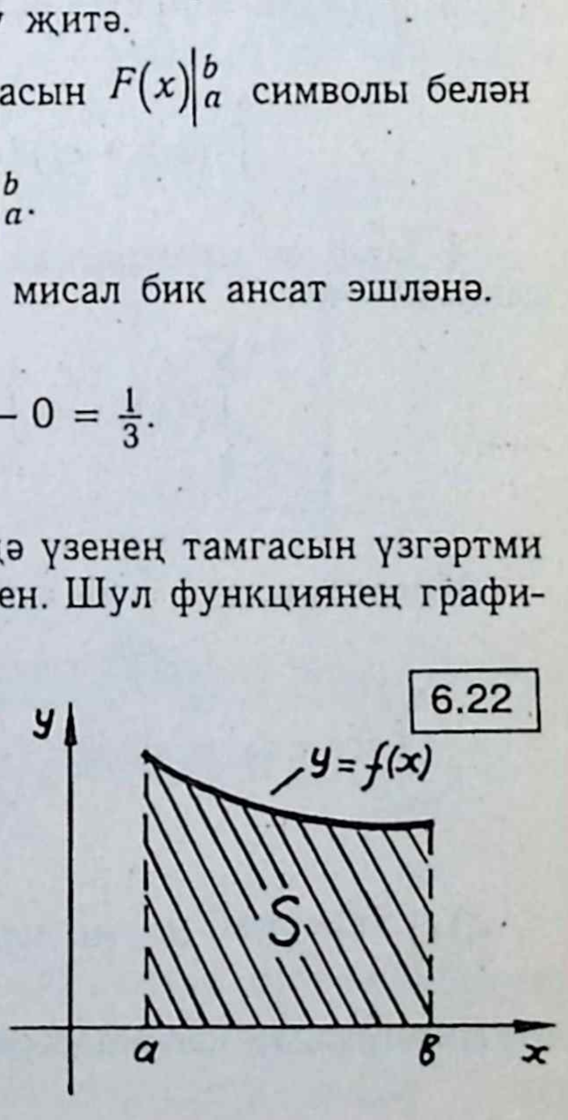
Бу формуладан файдалансак, үткән мисал бик ансат эшләнә.

$$\int_0^1 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

Икенче искәрмә. $[a,\ b]$ кисемтәсендә үзенең тамгасын үзгәртми торган өзлексез $f(x)$ функциясе бирелсен. Шул функциянең графигы, OX күчәренең $[a,\ b]$ кисемтәсе һәм $x = a$, $x = b$ турылары белән чикләнгән фигураны кәкресызыклы трапеция дип атыйлар (6.22 рәс.). Әгәр $[a,\ b]$ кисемтәсендә $f(x) \geq 0$ булса, тиңдәшле кәкресызыклы трапециянең мәйданы

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

6.22



формуласы белән исәпләнә, ягъни $\int_a^b f(x)dx$ интегралының зурлыгы кәкресызыклы трапециянең мәйданына тигез.

Түбәндәге интеграллар исәпләү кагыйдәләре урынлы:

1. Даими тапкырлануны интеграл тамгасы алдына чыгарырга мөмкин:

$$\int_a^b c\, f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

2. Әгәр $f(x)$ һәм $\varphi(x)$ $[a, b]$ кисемтәсендә интегралланучы функцияләр булса, $f(x) \pm \varphi(x)$ функциясе шулай ук бу кисемтәдә интегралланучы функция була:

$$\int_a^b [f(x) \pm \varphi(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b \varphi(x)dx.$$

3. $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$ булса,

$$\int_a^b f(c_1x + c_2)dx = \frac{1}{c_1} F(c_1x + c_2)\Big|_a^b \text{ була.}$$

4. Әгәр өч интеграл да мәгънәле булса, теләсә нинди a, b, c саннары өчен

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \text{ була.}$$

Мисаллар. а) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\, dx$ ны исәпләгез.

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\, dx = \sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - (-1) = 2;$$

б) $\int_1^4 \frac{3x^2+x+8x^4}{x^2}dx$ ны исәпләгез.

Интеграллау кагыйдәләрен кулланып табабыз:

$$\int_1^4 \frac{3x^2+x+8x^4}{x^2}dx = \int_1^4\left(3+\frac{1}{x}+8x^2\right)dx = 3\int_1^4 dx + \int_1^4 \frac{dx}{x} + 8\int_1^4 x^2dx =$$

$$= 3x\Big|_1^4 + ln|x|\Big|_1^4 + 8\frac{x^3}{3}\Big|_1^4 = 3(4-1) + ln4 - ln1 + \frac{8}{3}\left(4^3-1\right) = 9 + ln4 +$$

$$+ \frac{504}{3} = ln4 + 177.$$

в) $$\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{2}}(3\cos 2x + \sin 4x)dx = \frac{3\sin 2x}{2}\Big|_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\cos 4x}{4}\Big|_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}\left[\sin\left(2\frac{\pi}{2}\right)-\right.$$

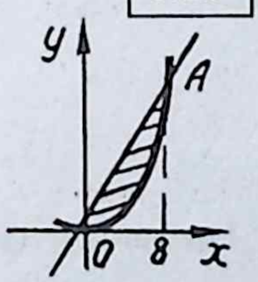
$$\left.-\sin\left(\frac{\pi}{8}\cdot 2\right)\right] - \frac{1}{4}\left(\cos\frac{4\pi}{2} - \cos\frac{4\pi}{8}\right) = \frac{3}{2}\left(\sin\pi - \sin\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{4}\left(\cos 2\pi - \cos\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= -\frac{3\sqrt{2}+1}{7}.$$

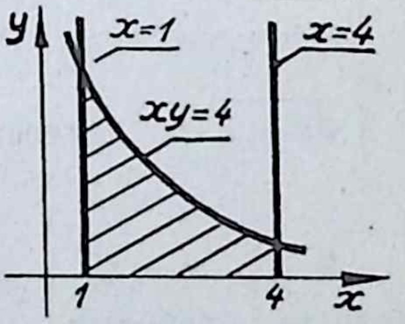
г) $y = x^2$, $y = 2x$ сызыклары белән чикләнгән фигураның мәйданын исәплик.

6.23 рәсемдә штрихланган S мәйданын ике мәйдән аермасы $(S_1 — S_2)$ аша исәплибез, биредә S_1 — турыпочмаклы OAB өчпочмагы мәйданы һәм S_2 — кәкресызыклы OAB трапециясе мәйданы.

6.23



6.24



$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2x \end{cases}$ системасын чишеп, парабола белән турының кисешү нокталарын табабыз: $O\,(0,0)$, $A\,(2,4)$. Ул чакта $S_1 - S_2 = \int_0^2 2xdx -$

$$-\int_0^2 x^2dx = x^2\Big|_0^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}.$$

д) $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ сызыклары белән чикләнгән кәкресызыклы трапециянең мәйданын табыгыз. Бу сызыкларның графикларын төзибез: $xy = 4$ — гипербола, $x = 1$, $x = 4$ — OY

күчәренә параллель турылар; $y = 0 - OX$ күчәре (6.24 рәс.). Эзләнелгән мәйдан:

$$S = \int_1^4 \frac{4}{x} dx = 4ln|x|\Big|_1^4 = 4(ln4 - ln1) = 8ln2.$$

Күнегүләр

1. $f(x) = 3x^2 + 1$ өчен $\phi(1) = 3$ булса, $\phi(x)$ беренчел функциясен табыгыз.

2. $f(x) = \cos 3x + 1$ өчен $\phi\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\pi$ булса, $\phi(x)$ беренчел функциясен табыгыз.

3. $\int_1^2 \left(6x^2 + 8x + 3\right) dx$ интегралын исәпләгез.

4. $\int_0^1 \frac{dx}{x+3}$ интегралын исәпләгез.

5. $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2} dx$ интегралын исәпләгез.

6. $\int_2^6 \sqrt{x-2}\, dx$ интегралын исәпләгез.

7. $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$ сызыклары белән чикләнгән фигураның мәйданын табыгыз.

8. $y = x^2 + 4x + 5$, $x = -2$, $x = 0$, $y = 0$ сызыклары белән чикләнгән фигураның мәйданын табыгыз.

Җаваплар

1. $x^3 + x + 1$. 2. $\frac{\sin 3x}{3} + x + \frac{5\pi}{3}$. 3. 39.

4. $ln\frac{4}{3}$. 5. $\frac{7}{4}$. 6. $\frac{16}{3}$. 7. 12. 8. $\frac{14}{3}$.

Күнегүләр

1. Түбәндәге функцияләрнең үсү һәм кимү аралыкларын табыгыз:

а) $f(x) = 3x^2 + 6x + 1$;

б) $f(x) = x^2e^{-x}$; в) $f(x) = x\,lnx$;

г) $f(x) = x - 2\sin x(0 \le x \le 2\pi)$; д) $f(x) = ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$.

2. Тигезсезлекләрне исбатлагыз:

а) $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}(x > 1)$; б) $x > ln(1 + x)(x > 0)$.

Җаваплар

1. а) $(-\infty; -1)$ аралыгында кими; $(-1; \infty)$ аралыгында үсә;

б) $(-\infty; 0)$ аралыгында кими; $(0; 2)$ аралыгында үсә, $(2; +\infty)$ аралыгында кими;

в) $\left(0; \frac{1}{e}\right)$ аралыгында кими; $\left(\frac{1}{e}; \infty\right)$ аралыгында үсә;

г) $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$ аралыгында кими; $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right)$ аралыгында үсә;

$\left(\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right)$ аралыгында кими; д) $(-\infty; \infty)$ аралыгында үсә.

КУШЫМТА

Саннан квадрат тамыр алу алгоритмы

Беренче мисал. 65025 саныннан квадрат тамыр алыгыз.

Чишү. Саннан квадрат тамыр алу алгоритмын түбәндәге схема белән күрсәтергә була.

	$\sqrt{6'50'25} = 255$	— беренче юл
	−4	— икенче юл
45	2 50	— өченче юл
X 5	2 25	— дүртенче юл
225		— бишенче юл
505	25 25	— алтынчы юл
X 5	25 25	— җиденче юл
25 25	0	— сигезенче юл

Бу схема болай төзелә:

1. Сан “уңнан — сулга” таба икешәр цифрлы группаларга бүленә (унарлы вакланма өтердән алып “уңнан — сулга”, һәм “сулдан — уңга” болай бүленә, мәсәлән, 125, 635 = 1 25, 63 50).

2. Беренче группада бары тик бер цифр 6. Квадраты 6 дан зур булмаган иң зур сан табабыз, ул сан 2 гә тигез. Аны җавапка язабыз (беренче юл).

3. Бу 2 ле санын квадратка күтәрәбез (4) һәм аны икенче юлга язып, 6 дан алабыз. Килеп чыккан аермага (2 гә) икенче группа цифрларын язып, 250 санын табабыз (өченче юл).

4. Җавапка язган санны (2) икеләтәбез һәм аны өченче юлның башына язабыз (4). Бу 4 ле саны янына шул санга тапкырлаганнан соң тапкырчыгыш 250 дән артык булмаган иң зур кыйммәтле цифрны янәшә язабыз. Моның 5 ле саны булуын күрү авыр түгел. Тапкырлау нәтиҗәсендә 225 саны чыга һәм аны бишенче юлга язабыз. Табылган 5 ле санын җавапка да 2 ле цифрыннан соң язабыз (беренче юл).

5. 250 саныннан 225 санын алабыз. Килеп чыккан аермага янәшә итеп соңгы группа цифрларын язабыз (2525 алтынчы юл).

6. Хәзер беренче юлдагы җавапның 25 санын икеләтәбез һәм аның янына, шул санга тапкырлагач тапкырчыгыш 2525 тән артык

булмаслык итеп, иң зур кыйммәтле цифр язабыз. Бу сан 505 була (алтынчы юл), һәм бу 5 ле санын беренче юлга да өстәп язабыз (беренче юл). $505 \times 5 = 2525$ сигезенче һәм җиденче юлга язабыз.

7. Алтынчы юлдан бу тапкырчыгышны алып, нуль табабыз. Нәтиҗәдә, җавап $\sqrt{65025} = 255$ була.

Икенче мисал. 0,01 төгәллеге белән 631 дән якынча квадрат тамыр алыгыз.

Чишү.	$\sqrt{6'31',00'00'00} = 25{,}19$
	4
45	231
X 5	225
225	
501	600
X 1	501
501	
5021	9900
X 1	5021
502 29	48 79 00
X 9	45 20 61
452061	35 839

Шулай итеп, $\sqrt{631} = 25{,}12$. Монда җавап 0,01 төгәллеге белән табылды.

Күргәнебезчә, бу схема үзенең шактый катлаулылыгы белән һәрвакыт бик үк уңай түгел. Практикада санның тамырын, Горнер кагыйдәсен кулланып, эзлекле рәвештә кирәкле төгәллек дәрәҗәсенә җиткереп табалар.

Бу кагыйдә буенча a санының арифметик квадрат тамыры түбәндәге рекурент формула буенча табыла:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \ (n \in N), \qquad (1)$$

биредә x_1 дип теләсә нинди уңай санны алырга була. Бу формула санның тамырын теләсә нинди дәрәҗәдәге төгәллек белән дә табарга мөмкинлек бирә.

Өченче мисал. 0,01 төгәллеге белән 631 дән якынча тамыр алыгыз.

Чишү. Әйтик, $x_1 = 25$. Ул чакта

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(25 + \frac{631}{25}\right) = \frac{1}{2}(25{,}000 + 25{,}240) = 25{,}120.$$

$$x_3 = \frac{1}{3}\left(25{,}12 + \frac{631}{25{,}12}\right) = \frac{1}{2}(25{,}120 + 25{,}118) = 25{,}119.$$

$|x_3 - x_2| = 0001 < 0{,}01$ булганлыктан, $\sqrt{631} = 25{,}12$ 0,01 төгәллеге белән табылды.

Шулай итеп, кирәкле төгәллек булсын өчен, бары тик ике мәртәбә якынлашу җитте.

Искәрмә. Биредә (төгәллек 0,01 булса да) исәпләү өтердән соң өч цифр белән алып барылды. Бу исәпләүдә төгәллек дәрәҗәсе, җавапны түгәрәкләү өчен, кирәкле төгәллек дәрәҗәсеннән ким булмасын өчен кирәк.

Саннан якынча тамыр алуны тулы квадратка тутыру ысулы белән дә эшләргә мөмкин:

Әйтик, $a = \alpha^2 + \beta$. Бу аңлатма $\left(\alpha + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \alpha^2 + \beta + \frac{\beta^2}{4\alpha^2}$ бердәйлегеннән соңгы кушылучыны алып ташлаудан килеп чыга. Чыннан да,

$$\sqrt{a} = \sqrt{a^2 + \beta} \cong \alpha + \frac{\beta}{2\alpha}. \quad (2)$$

Бу формула, $|\beta|$ саны α дан кечерәк булган саен, (1) һәм (2) формулалары арасында принципиаль аерма булуын күрсәтеп үтик. Әгәр (2) формуласының төгәллеге β һәм α ны ничек уңышлы алуга бәйле булса, (1) формуласы беренче якынча санны нинди төгәллектә алуга бәйле түгел.

Дүртенче мисал. $\sqrt{631}$ нең якынча кыйммәтен табыгыз.
(2) формуласы буенча:

1. $\sqrt{631} = \sqrt{25^2 + 6} \cong 25 + \frac{6}{2\cdot 25} = 25{,}12, \quad (\alpha = 25,\ \beta = 6).$

2. $\sqrt{631} = \sqrt{30^2 - 269} \cong 30 - \frac{269}{2\cdot 30} = 25{,}52, \quad (\alpha = 30,\ \beta = 269).$

Күпбуынны “почмаклап” бүлү

Беренче мисал. $6x^3 - 7x^2 - 16x + 12$ не $x - 2$ икебуынына бүлүне түбәндәге схема буенча эшлик:

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{l} 6x^3 - 7x^2 - 16x + 12 \\ \underline{6x^3 - 12x^2} \end{array} & \begin{array}{l} x - 2 \\ \hline 6x^2 + 5x - 6 \end{array} \\
-\begin{array}{l} 5x^2 - 16x + 12 \\ \underline{5x^2 - 10x} \end{array} & \\
-\begin{array}{l} -6x + 12 \\ \underline{-6x + 12} \end{array} & \\
0 &
\end{array}
$$

Өлешнең өлкән буынын табу шарты: бу өлкән буынны $\left(6x^2\right)$ бүлүченең өлкән буынына (x) тапкырлагач, бүленүченең өлкән буыны килеп чыгарга тиеш, ягъни $6x^3$.

$6x^2$ ны бүлүчегә тапкырлап, $6x^3 - 12x^2$ ны табабыз, аны бүленүчедән алгач, $5x^2 - 16x + 12$ килеп чыга.

Өлешнең икенче буынын шундый ук шарт буенча табабыз: бу буынның $(5x)$ бүлүченең өлкән буыны белән тапкырчыгышы $5x^2$ булырга тиеш. $5x$ ны бүлүче $(x - 2)$ ка тапкырлап, $5x^2 - 10x$ ны табабыз һәм аны $5x^2 - 16x + 12$ тан алабыз: $-6x + 12$. Ниһаять, өлешнең соңгы буыны -6 була.

Икенче мисал. $2x^4 + 3x^2 - 1$ күпбуынын $x^3 - x^2 + 1$ күпбуынына бүлегез.

"Почмак" белән бүлү схемасы бу очракта болай була:

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{l} 2x^4 + 0 \cdot x^3 + 3x^2 + 0 \cdot x - 1 \\ \underline{2x^4 - 2x^3 + 0 \cdot x^2 + 2x} \end{array} & \begin{array}{l} x^3 - x^2 + 1 \\ \hline 2x + 2 \end{array} \\
-\begin{array}{l} 2x^3 + 3x^2 - 2x - 1 \\ \underline{2x^3 - 2x^2 + 2 \cdot x + 2} \end{array} & \\
5x^2 - 2x - 3 &
\end{array}
$$

Монда $5x^2 - 2x - 3$ калдык була, чөнки $5x^2$ x^3 ка бүленми. Нәтиҗәдә, безнең баштагы күпбуынны түбәндәге рәвештә язып була:

$$2x^4 + 3x^2 - 1 = \left(x^3 - x^2 + 1\right)(2x + 2) + 5x^2 - 2x - 3.$$

Функциянең кыйммәтен якынча исәпләү өчен дифференциалның кулланышы

Функция үсемтәсенең $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x$ рәвешендә бирелгәнлеге безгә мәгълүм. Функция үсемтәсе Δy белән аның дифференциалы $dy = f'(x)dx$ эквивалент чиксез кечкенә зурлыклар, чыннан да,

$$\frac{\Delta y}{f'(x)dx} = \frac{f'(x)dx + \alpha\Delta x}{f'(x)\Delta x} \Rightarrow \frac{\Delta y}{f'(x)dx} = 1 + \frac{\alpha}{f'(x)};$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{f'(x)\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(1 + \frac{\alpha}{f'(x)}\right) = 1 + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha}{f'(x)} = 1.$$

Димәк, $dy = f'(x)\Delta x = y' \cdot dx$, ягъни Δx җитәрлек кечкенә булганда, функция үсемтәсен аның дифференциалы белән алыштырып, якынча исәпләүләрдә бу мөмкинлекне кулланырга була. Күп очракта функция үсемтәсе белән дифференциал арасындагы бәйләнешне түбәндәгечә язу файдалы:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x \Rightarrow f(x_0 + \Delta x) \cong$$

$$\cong f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \qquad (1)$$

Дифференциалның якынча исәпләүләрдә кулланышына мисаллар:

1 нче мисал. Кубның 30 см булган кабыргасы 0,1 см га артканда кубның күләме күпмегә артканлыкны табыйк.

Чишү. Кубның кабыргасы Δx ка артканда, аның күләме түбәндәгечә арта:

$$\Delta V = (x + \Delta x)^3 = x^3 = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3.$$

Әгәр дифференциалны кулланcак, $\Delta V = 3x^2 \cdot dx$ ка арткан булыр иде. Бирелгән $x = 30$ см, $\Delta x = 0{,}1$ см зурлыкларын аңлатмага куеп, ΔV һәм dV не исәплик: $\Delta V = 3 \cdot 30^2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 30 \cdot 0{,}1^2 + 0{,}1^3 = 270{,}901$ см³; $dV = 3 \cdot 30^2 \cdot 0{,}1 = 270$ см³. Бу алыштырудан килеп чыккан абсолют хата $\delta = \Delta V - dV = 0{,}901$ (см³) 1 см³ дан кимрәк. Чагыштырмача хата 0,4 проценттан да кимрәк.

2 нче мисал. $y = \sqrt[n]{x}$ булсын ди. Ул вакытта $dy = \frac{dx}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx} \cdot dx.$

Әгәр (1) формуласын куллансак,

$$\sqrt[n]{x+\Delta x} \approx \sqrt[n]{x} + \frac{\sqrt[n]{x}}{nx} \cdot dx$$

икәнен табабыз, $\Delta x = dx = \alpha$ дип алсак, тамыр алу өчен түбәндәге формуланы табабыз:

$$\sqrt[n]{x+\alpha} \approx \sqrt[n]{x}\left(1 + \frac{\alpha}{nx}\right). \qquad (2)$$

Аерым алганда, $x = 1$ булса, бу формула $\sqrt[n]{1+\alpha} \approx 1 + \frac{\alpha}{n}$ рәвешенә керә. (2) формуланы $\sqrt[3]{25}$ не якынча исәпләү өчен кулланабыз, $x = 27$; $\Delta x = -2$ дип алсак

$$\sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{27-2} \cong \sqrt[3]{27}\left(1 - \frac{2}{3\cdot 27}\right) = 3 - \frac{2}{27} = \frac{79}{27} \cong 2{,}92.$$

(2) формуланы 1,1 не исәпләүдә кулслансак,

$$\sqrt{1{,}1} = 1 + \frac{0{,}1}{2} = 1{,}05.$$

3 нче мисал. $y = \sin x$ булса, $dy = \cos x\,dx$ була, бу очракта $\sin(x_0 + \Delta x) \cong \sin x_0 + \Delta x \cos x_0$; $\quad \sin(x_0 + \alpha) \cong \sin x_0 + \alpha \cos x_0$. $x_0 = 0$ булса, $\sin\alpha \approx \alpha$, $\sin\alpha$ һәм α эквивалентлыгы безгә билгеле. $\sin 31°$ не исәплибез. $x = \frac{\pi}{6}$; $\alpha = \frac{\pi}{180}$;

$$\sin 31° = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right) \cong \sin\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\cos\frac{\pi}{6} = 0{,}5 + 0{,}0174 \cdot 0{,}8652 = 0{,}5151.$$

5 нче мисал. $f(x) = e^{0,1x(1-x)}$ функциясе бирелгән булсын. $f(1{,}05)$ нең кыйммәтен якынча исәплик. Моның өчен $x_0 = 1$ дип, $\Delta x = 0{,}05$ алабыз.

$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$ формуласын кулланабыз:

$$f'(x) = e^{0,1x(1-x)} \cdot 0{,}1(1-2x);\quad f'(1) = 0{,}1(1-2) \cdot e^{0,1(1-1)} = -0{,}1.$$

$$f(1) = e^{0,1\cdot 1(1-1)} = 1.$$

$$f(1{,}05) \approx 1 - 0{,}1 \cdot 0{,}05 = 0{,}995.$$

ЯРДӘМЛЕКТӘ КУЛЛАНЫЛГАН ТӨП ТАМГАЛАР

$[a, b]$ — ябык ара (кисемтә), $a \leq x \leq b$ тигезсезлеген канәгатьләндерүче саннар күплеге;

(a, b) — ачык ара: $a < x < b$;

$(a, b]$ — ярымачык ара: $a < x \leq b$;

$[a, b)$ — ярымачык ара: $a \leq x < b$;

$(-\infty, +\infty)$ — интервал: $-\infty < x < +\infty$;

$(-\infty, b)$ — интервал: $-\infty < x < b$;

$D(f)$ — функциясенең билгеләнү өлкәсе;

МТӨ — функциянең (әгәр $f_1(x) = f_2(x)$ тигезләмәсе булса, МТӨ$= D(f_1) \cap D(f)$) мөмкин табылган кыйммәтләр өлкәсе (күплеге);

$\Rightarrow$ — « ... нан (нән) килеп чыга» дигән мәгънәне аңлата;

$\Leftrightarrow$ — тизезкөчлелек, «бу ике раслауның берсе икенчесенең нәтиҗәсе» дигән мәгънәне аңлата;

$\varnothing$ — буш күплек тамгасы;

$\cup$ — күплекләрне берләштерү тамгасы;

$\cap$ — күплекләрнең кисешү тамгасы;

N — натураль саннар күплеге;

R — барлык реаль саннар күплеге;

R_+ — барлык уңай реаль саннар күплеге;

Z — бөтен саннар күплеге;

$\begin{cases} f(x) = 0 \\ \varphi(x) = 0 \end{cases}$ — ике тигезләмәдән торган система тамгасы;

$\left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ \varphi(x) = 0 \end{array}\right.$ — ике тигезләмә җыелмасы тамгасы;

$f'(x)$ — функциясенең чыгарылмасы;

$\int$ — аныксыз интеграл тамгасы;

$\int\limits_a^b$ — анык интеграл тамгасы;

$(\overline{a} \wedge \overline{b})$ — $\overline{a}$ һәм $\overline{b}$ векторлары арасындагы почмак зурлыгы;

$Пр_u\overline{a}$ — $\overline{a}$ векторының u күчәренә булган проекциясе;

$Пр_{\overline{b}}\overline{a}$ — $\overline{a}$ векторының $\overline{b}$ векторына булган проекциясе;

$|\overline{a}|$ — $\overline{a}$ векторының санча зурлыгы (модуле).

Эчтәлек

Кереш сүз ... 3

I бүлек. ТИГЕЗЛӘМӘЛӘР ... 5

1. Төп төшенчәләр һәм билгеләмәләр ... 5
2. Рациональ тигезләмәләр ... 15
3. Иррациональ тигезләмәләр ... 39
4. Күрсәткечле һәм логарифмик тигезләмәләр ... 54
5. Тригонометрик тигезләмәләр ... 79
6. Тигезләмәләр системалары ... 120

II бүлек. ТИГЕЗСЕЗЛЕКЛӘР ... 158

1. Төп төшенчәләр һәм билгеләмәләр ... 158
2. Рациональ тигезсезлекләр ... 162
3. Иррациональ тигезсезлекләр ... 169
4. Күрсәткечле һәм логарифмик тигезсезлекләр ... 176
5. Тригонометрик тигезсезлекләр ... 181
6. Интерваллар методына карата берничә фикер ... 192

III бүлек. КОМБИНАТОРИКА ЭЛЕМЕНТЛАРЫ ҺӘМ НЬЮТОН БИНОМЫ ...

1. Күплекләр теориясе билгеләмәләре ... 195
2. Комбинаториканың төп кагыйдәләре ... 198
3. Урнаштырмалар ... 204
4. Алыштырмалар ... 206
5. Оештырмалар ... 209
6. Математик индукция принцибы ... 213
7. Ньютон биномы ... 217

IV бүлек. ВЕКТОРЛАР АЛГЕБРАСЫ ЭЛЕМЕНТЛАРЫ ... 224

1. Төп билгеләмәләр ... 224
2. Векторлар белән сызыкча операцияләр ... 226
3. Векторларның сызыкча бәйләнеше. Векторларны таркату ... 232
4. Векторларны скаляр тапкырлау ... 236
5. Турыпочмаклы координаталар системасы һәм радиус-вектор ... 242

V бүлек. СТЕРЕОМЕТРИЯДӘН МӘСЬӘЛӘЛӘР ... 246

1. Күпкырлыклар ... 247
2. Әйләнү җисемнәре ... 262
3. Күпкырлыклар һәм әйләнү җисемнәренең комбинацияләре ... 274
4. Әйләнү җисемнәренең комбинацияләре ... 295
5. Башка төрле мәсьәләләр ... 302

VI бүлек. МАТЕМАТИК АНАЛИЗ ЭЛЕМЕНТЛАРЫ 307

1. Санлы эзлеклелек һәм аның чикләмәсе 307
2. Функциянең чикләмәсе һәм аның ноктада өзлексезлеге 313
3. Функциянең чыгарылмасы 321
4. Функциянең экстремумы. Кисемтәдә функциянең иң зур һәм иң кечкенә кыйммәте 326
5. Дифференциалланучы функциянең монотон аралыгы 330
6. Функцияне тикшерү 331
7. Аныксыз һәм анык интеграллар. Беренчел функция һәм аныксыз интеграл 334

КУШЫМТА 342

Учебное издание

Гараев Кавас Гараевич
Исхаков Энгель Мухамедович
Мубаракзянов Гамир Мубаракзянович

МАТЕМАТИКА

(на татарском языке)

Редакция мөдире *Ф. Г. Иштирәкова*
Редакторы *Р. С. Вафина*
Тышлык рәссамы *Р. А. Сәйфуллина*
Бизәлеш редакторы *Р. А. Сәйфуллина*
Техник редакторы *Л. И. Фокейчева*
Корректорлары *Н. К. Нотфуллина, А. А. Халитова*

Нәшриятка 183 нче номерлы лицензия 1997 елның 7 апрелендә бирелгән.
Җыярга тапшырылды 28.03.97. Басарга кул куелды 12.02.98. Форматы $60 \times 90^1/_{16}$.
Типография кәгазе № 2. "Антиква" гарнитурасы. Офсет басма. Басма табагы 22,0.
Нәшер-хисап табагы 15,05. Тиражы 4000 д. Заказ Н-159.

"Мәгариф" нәшрияты. 420503. Казан, Бауман ур., 19.
Издательство "Магариф". 420503. Казань, ул. Баумана, 19.
Тел./факс (8432) 32-57-48

Татарстан газета-журналлар нәшрияты типографиясе.
420066. Казан, Декабристлар ур., 2.